TREINTA RELATOS UNIVERSALES DE GEOMETRÍA ELEMENTAL:

Una breve guía para entenderlos todos

1ª edición

Treinta Relatos Universales de Geometría Elemental:
Una breve guía para entenderlos todos

Treinta Relatos Universales de Geometría Elemental:
Una breve guía para entenderlos todos

Revisión Técnica:
Editorial CEDIA

Editora:	Margarita Kostikova
Corrección de Estilo:	Laura Malache Silva
Ilustración:	Iliá Endara
Diseño de Portada:	Erick Brito Quezada
Coordinación:	Editorial CEDIA

Una publicación de la Editorial CEDIA, arbitrada por pares académicos de doble ciego.

CEDIA
Gonzalo Cordero 2-111 y J. Fajardo
Cuenca – Ecuador
info@cedia.org.ec

ESPE – UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS
Av. General Rumiñahui s/n y Ambato.
Sangolquí – Ecuador
comunicacion@espe.edu.ec

Primera edición
ISBN: 978-9942-8952-6-4

Quito, Ecuador
Agosto de 2023.

AUTORES

Johnny Mario Achi Sibri:

Ingeniero Mecánico. Docente Ciencias Exactas.

Pablo Álvarez Jiménez:

Ingeniero en Electrónica y Telecomunicaciones, Magíster en Administración de Empresas, Egresado de la Maestría en Enseñanza de la Matemática. Consultor en Gerencia de Proyectos.

Marcelo Javier Arévalo Luzuriaga:

Ingeniero en Electrónica control y Automatización Industrial, Maestría en Enseñanza de la Matemática.

José Roberto Bossano Cueva:

Licenciado en Ciencias de la Educación con mención en Matemática y Física, Maestría en Enseñanza de la Matemática. Docente de Matemática.

Roberto Daniel Calderón Valle:

Ingeniero Agroindustrial, Magíster en Auditoría de Gestión de Calidad, Maestría en Enseñanza de la Matemática. PhD en Economía e Innovación Matemática de la Universidad Estatal del Suroeste de Rusia (SWSO). Docente Investigador de la Universidad Técnica de Cotopaxi (UTC).

Cristian Medardo Díaz Matailo:

Maestría en Enseñanza de la Matemática, Maestría Universitaria en Formación del Profesorado de Educación Secundaria del Ecuador, especialidad en Matemáticas. Licenciado en Ciencias de la Educación, Profesor de Enseñanza Media en la especialización de Matemáticas y Física, Docente Investigador externo del Instituto de Etnociencias de la Universidad Central del Ecuador.

Vicente Paúl García Mancero:

Ingeniero en Sistemas e Informática, Maestría en Enseñanza de la Matemática, Docente Investigador en la Universidad de las Fuerzas Armadas – ESPE.

Manuel Jesús de los Ángeles Guamán Jachero:

Licenciado en Ciencias de la Educación en la Especialidad de Matemática. Maestría en Gerencia y Liderazgo Educacional. Doctor en Ciencias de la Educación mención en Investigación y Planificación Educativa. Maestría Universitaria en Formación Internacional especializada del profesorado especialidad en ciencias exactas física y matemática. Maestría en Enseñanza de la Matemática.

Fátima Aurora Haz López:

Maestría Universitaria en Formación del Profesorado de Educación Secundaria de Ecuador Especialidad en Matemáticas. Maestría en Enseñanza de la Matemática. Licenciada en Ciencias de la Educación, Profesora de Enseñanza Media en la Especialización de Matemática y Física.

Libinton Duberli Lara Rivera:

Ingeniero en Electrónica y Telecomunicaciones. Egresado de la Maestría en Enseñanza de la Matemática. Docente Investigador del Instituto Superior Tecnológico Tena.

Carlos Vicente Llerena Aguilar:

Ingeniero Mecánico, Maestría en Enseñanza de la Matemática, Docente Investigador en la Universidad Regional Amazónica IKIAM.

Juan Carlos Sarango Cuenca:

Ingeniero en Electrónica y Control, Diplomado en Administration Bussines. Maestría en Enseñanza de la Matemática. Docente Investigador en la Universidad de las Fuerzas Armadas – ESPE.

Narcisa Marisol Sarmiento Sarmiento:

Maestría en Ciencias de la Educación, Maestría en Enseñanza de la Matemática. Docente Investigador en la Pontificia Universidad Católica del Ecuador.

Damián Michael Tapia Orbea:

Ingeniero Mecánico, Maestría en Administración de Empresas, y Maestría en Enseñanza de la Matemática. Consultor Procesos Productivos.

Marina Vladimirovna Smirnova:

Ingeniera en Electrónica y Microprocesadores, Ingeniera en Gestión Educativa. Maestría en Enseñanza de la Matemática, Docente de Matemática y Física.

Luis Jhon Pilataxi Morales:

Licenciado en Ciencias de la Educación con Especialidad en Física y Matemática. Maestría en enseñanza de la Matemática.

Miguel Ángel Valencia Quezada:

Licenciado en Ciencias de la Educación con Especialidad en Física y Matemática. Maestría en Enseñanza de la Matemática. Docente de Matemática

Ney Marcelo Zambrano Badillo

Ingeniero en Computación, Maestría en Enseñanza de la Matemática. Especialista e Investigador en Mantenimiento.

CONTENIDO

GEOMETRÍA CON REGLA Y COMPÁS

GEOMETRÍA ALGEBRAICA
CON REGLA, COMPÁS Y PARÁBOLA FIJA

GEOMETRÍA ALGEBRAICA CON POLINOMIOS

Prólogo

En esta obra se presentan problemas de geometría desarrollados en el transcurso de la historia; revisaremos juntos los orígenes del conocimiento empleando métodos básicos como, por ejemplo, la regla y el compás.

Las soluciones que se plantean abarcan diversos métodos aplicados a vivencias, muchas de ellas de la vida cotidiana en algunas culturas originarias de América y Europa.

Algunos de los acontecimientos expuestos, en esta obra, relatan hechos reales e imaginativos investigados por los autores.

Lograr que los lectores se involucren en el fascinante mundo de la geometría fortaleciendo su conocimiento y desarrollando su curiosidad, es el principal objetivo de esta obra; seguramente muchas de las historias desarrolladas han sido experimentadas, de algún modo, a lo largo de la vida del ser humano en sus diversas facetas.

Esta obra va dirigida a estudiantes con conocimiento básico de geometría. Esperamos que, a partir de su lectura, el texto desarrolle el interés para solucionar problemas cotidianos, planteados en una época donde la imaginación fue la principal herramienta del ser humano para la búsqueda de la verdad y el conocimiento.

Los Autores.

1

El Templo de Ra

El faraón Amasis estaba entusiasmado con la idea de construir una pirámide para su ultratumba.

Un día invitó a Tales de Mileto, un sabio griego, a dar un paseo al desierto de Guizeh, donde se encontraba la pirámide de Keops.

El carro real se detuvo frente a la pirámide. El faraón dijo:

—¡Así de alta quiero mi morada después de la muerte!

—¡Así de alta es tu morada ahora mismo, oh, rey! —replicó Tales—. ¿Por qué solo después de la muerte?

El faraón no comprendió:

—¿Qué quieres decir?

—Tu cuerpo es el templo de Ra, majestad —explicó Tales—. Y es tan alto como esta pirámide.

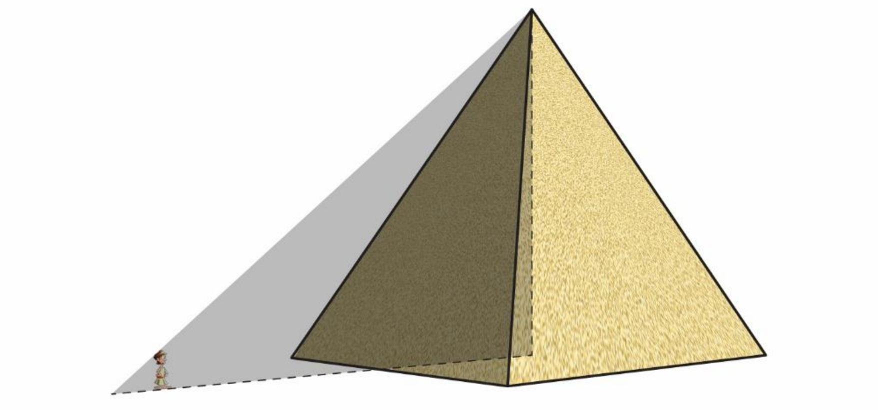
—¿Mi cuerpo es así de alto? —exclamó el faraón—. ¿Cómo es posible que digas semejante disparate?

—Estarás de acuerdo conmigo si prestas un poco de atención al asunto —aseguró Tales.

—¡Pero mi cuerpo mide solo seis pies, y la pirámide debe medir siquiera unos trescientos! —exclamó el faraón.

—Yo creo que la pirámide mide más de cuatrocientos pies —dijo Tales—. ¡Salgamos de dudas!

Se bajó del carro y midió la sombra de Amasis. Esta medía exactamente 6 pies. Entonces, Tales empezó a medir la sombra de la pirámide, dando pasos de un pie y diciendo: uno, dos, tres...



Al llegar al centro de la pirámide, dijo:

—Cuatrocientos ochenta. ¡Faraón, la pirámide mide cuatrocientos ochenta pies de alto!

—¿Cómo lo sabes?

—Muy simple —dijo Tales—. Ra hizo que la sombra de tu cuerpo, hace unos instantes, se hiciera igual a tu altura. Y, en el mismo instante, hizo que la sombra de la pirámide también se hiciera igual a su altura. Porque, para Ra, tú eres más importante que la pirámide y que el cosmos entero. ¡Tú eres el centro de la existencia! ¡La naturaleza te imita en todo! Cuando la sombra de tu cuerpo se hace igual a tu altura, la sombra de la pirámide también se hará igual a su altura. Cuando tu cuerpo, que mide 6 pies, proyecta una sombra de 6 pies, la pirámide, que mide 480 pies, proyectará una sombra de 480 pies. ¡La pirámide te imita como una sombra!

—¡Extraordinario! —exclamó Amasis—. ¡Yo soy el centro de la creación!

El cuerpo del sabio llega al Cielo.

2

El guerrero

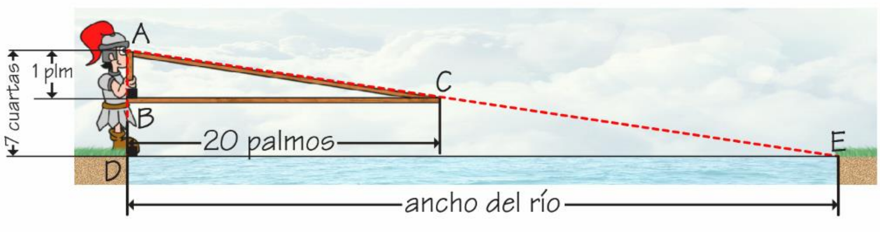
En un país muy lejano, vivía un joven fuerte y valiente. Se había enfrentado a la muerte en varias ocasiones, no tenía miedo a las fieras salvajes, y era el guerrero predilecto del rey.

Un día estaba acompañando al rey en un paseo real por la orilla de un río selvático.

—Tú eres el hombre más fuerte del reino —le dijo el rey—. Me gustaría saber qué ancho posee este río, pero es peligroso introducirse en él, pues está lleno de pirañas. ¿Crees que la fuerza que posees podrá ayudarte a averiguarlo? ¿Puedes decirme qué ancho tiene este río?

Por primera vez en su vida, en vez de emplear la fuerza, el guerrero tuvo que ponerse a pensar. ¡Ayúdale en esta difícil tarea, por favor!

¡El método de Tales puede ser muy útil! El guerrero tomó tres maderos, modificando su tamaño hasta obtener un triángulo rectángulo de forma que su vista diera a la otra orilla del río.



La altura de ese triángulo resultó medir 1 palmo[1], y la base medía 20; la distancia desde el suelo a la visual medía 7 cuartas[2]. De este modo se formaron dos triángulos semejantes: el triángulo ABC y el triángulo ADE.

El guerrero utilizó el mismo razonamiento que había empleado Tales. Pensó:

“La altura del triángulo de los maderos tiene la misma proporción con la base que mi altura con el ancho del río”.

En otras palabras: 1 palmo es a 20 palmos como 7 cuartas es al ancho del río:

$$\frac{1\,palmo}{20\,palmos} = \frac{7\,cuartas}{ancho\ del\ río}$$

Ya lo sabes:

$$ancho\ del\ río = 7.20 = 140\ cuartas$$

Anota la respuesta que obtuvo el guerrero:

> **El ancho del río mide 140 cuartas, lo que equivale a 32 metros con 20 centímetros.**

¡El método de Tales resolvió el problema brillantemente!, ¿verdad?

—¡La inteligencia puede más que la fuerza! —dijo el rey—. La fuerza puede domar a un león, ¡pero la inteligencia vence incluso a un cardumen de pirañas!

[1] Un palmo equivale a 8cm.
[2] Una cuarta equivale a 23cm.

3

La Vela Escarlata

El faraón Didufri reinó en Egipto en el III milenio a.C., durante el Imperio antiguo. Un día decidió hacer una estatua al dios Amón, el rey de los dioses. Como los árboles en Egipto no producían madera de la calidad necesaria, envió un barco a Líbano para comprar allí la madera de sus cedros.

La noche de la expedición, Thot, el Dios de la escritura, se presentó en el sueño de Didufri y le dijo:

—¡Oh, gran rey! Si deseas que el viaje tenga éxito, ordena que la vela de tu barco se cosa de lino escarlata y su contorno se borde con cinta de oro. La vela debe tener la forma de un triángulo rectángulo, y sus lados menores deben medir 3 y 4 brazas[3].

Al despertar, Didufri llamó a su escribano Beder, le contó el sueño y le preguntó:

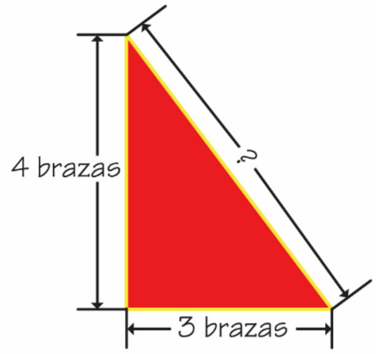
—¿Qué largo debe tener la cinta de oro? ¿Necesitas medir los bordes de la vela para decírmelo?

—Puedo decirlo sin mirar la vela, ¡oh, faraón! —dijo el escribano y se puso a pensar.

¡Ayúdale en esta difícil tarea, por favor!

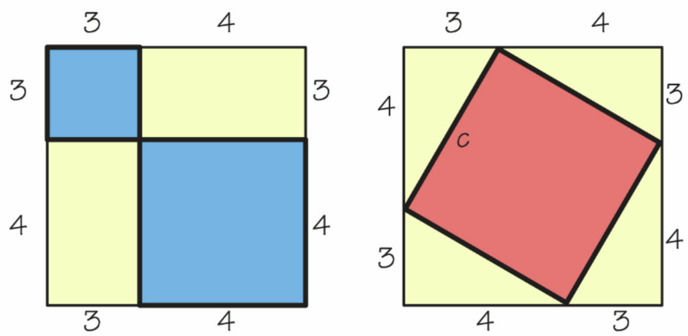
Ésta es la forma que debe tener la vela del barco del faraón Didufri:

[3] Una braza equivale a 1.67 metros.



Los lados menores del triángulo (es decir, los catetos), miden 3 y 4 brazas; lo que el escribano desea saber es cuántas brazas medirá el lado mayor (es decir, la hipotenusa). Beder dirige a Thot una oración, y el dios egipcio le revela un secreto de los triángulos rectángulos. ¿Cuál es? Este: En un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados, construidos sobre los catetos, es siempre igual al cuadrado, construido sobre la hipotenusa. ¿Por qué? ¡Junto con Beder, intenta comprenderlo!

Para ello llama “c” a la hipotenusa del triángulo de la vela, desconocida por el momento, y dispón los tres cuadrados de este modo:



¿Qué puedes observar? Que los cuadrados de los catetos, complementados con dos rectángulos de lados 3 y 4, hacen un cuadrado de lado $3 + 4 = 7$ brazas; y que el cuadrado de la hipotenusa, complementado con cuatro triángulos rectángulos de lados 3 y 4, hacen el mismo cuadrado de lado $3 + 4 = 7$ brazas.

Ahora bien: los dos rectángulos de lados 3 y 4 contienen la misma área que los cuatro triángulos rectángulos de los mismos lados. Si restas del área del cuadrado grande cantidades iguales, obtendrás cantidades iguales. Y eso significa que:

$3^2 + 4^2 = c^2$

En otras palabras:

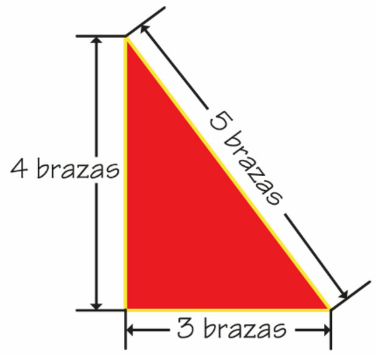
$c^2 = 9 + 16 = 25$

Es decir:

$c = 5\ brazas$

Junto al escribano Beder, has obtenido la siguiente respuesta:

> **Si los catetos de la vela miden 3 y 4 brazas, la hipotenusa debe medir 5 brazas, puesto que $\mathbf{3^2 + 4^2 = c^2}$. El perímetro del triángulo será de $\mathbf{3 + 4 + 5 = 12}$ brazas, y es lo que medirá la cinta de oro.**



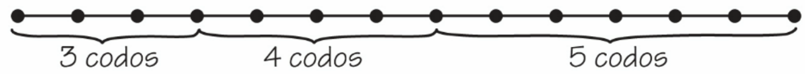
Como puedes ver, lo que el gran dios Thot reveló a Beder es que, en un triángulo rectángulo, cuyos catetos miden a y b unidades y la hipotenusa c unidades, siempre se cumple la igualdad:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

—¡La cinta de oro debe medir 12 brazas de largo, majestad! —dijo el escribano Beder—, porque el lado mayor de la vela medirá 5 brazas.

La vela se fabricó ese mismo día. El barco partió a Líbano y cumplió su misión exitosamente. El faraón Didufri hizo tallar una imagen del dios Amón de la excelente madera de cedro y la colocó en el templo de Amón en Tebas.

A partir de entonces el triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5 fue considerado sagrado. Los agrimensores egipcios lo utilizaban como escuadra para trazar ángulos rectos. En su viaje a Egipto, Pitágoras se sorprendió al ver que cada agrimensor llevaba, enrollada al hombro, una cuerda. En ella 13 nudos separaban 12 distancias de un codo cada una:



Para trazar el ángulo recto, procedían del siguiente modo:

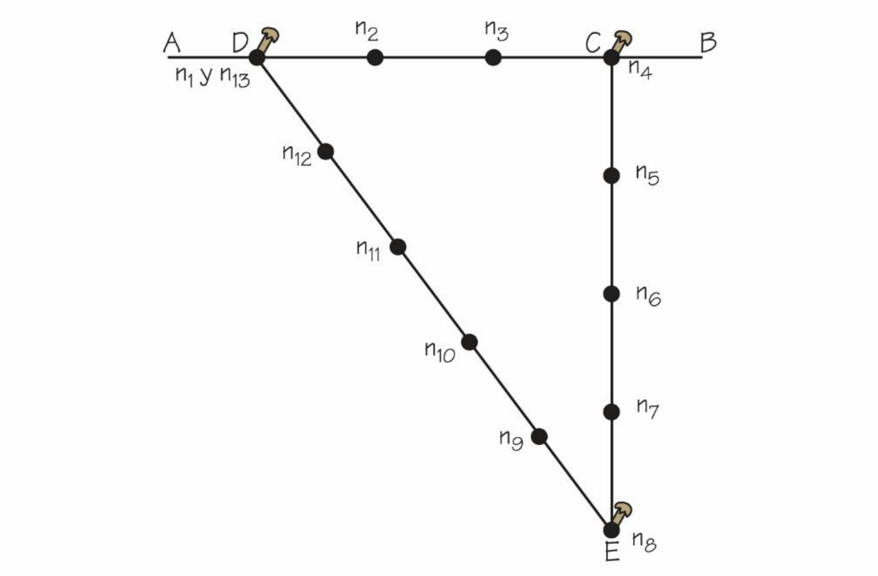
Imagina que había que trazar una perpendicular a la línea AB en el punto C. El agrimensor colocaba una estaca en el punto C y amarraba a ella el cuarto nudo (n_4) de la cuerda. En seguida tendía la cuerda en la dirección CA hasta el punto D, en el cual colocaba otra estaca y amarraba el primer nudo (n_1) y el último (n_{13}). Luego tiraba de la cuerda en el octavo nudo (n_8), obteniendo de este modo el punto E, en el cual se colocaba la tercera estaca. La cuerda quedaba tensa y el triángulo ECD, que se obtenía de este modo, era rectángulo, pues era el triángulo sagrado.

—¿Por qué estás seguro de que el triángulo de lados 3, 4 y 5 es rectángulo? —preguntaba Pitágoras a los agrimensores que empleaban esta técnica.

—No lo sé —invariablemente contestaba el campesino—. Es un secreto que me enseñó mi padre. ¡Nunca falla!

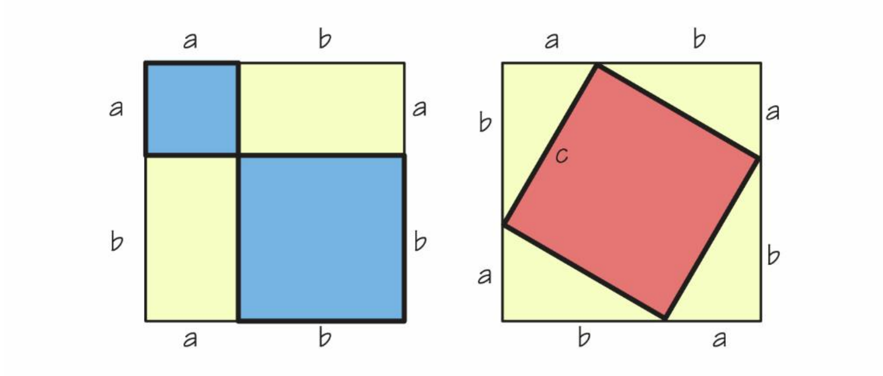
Pitágoras hizo la misma pregunta a un sacerdote.

—Es un conocimiento que el dios Thot reveló a la nación egipcia —explicó el sacerdote—. Es que, en los triángulos rectángulos, la suma de los cuadrados de los lados menores es igual al cuadrado del lado mayor. Es por eso que en un triángulo rectángulo de lados 3 y 4, el lado mayor tiene que medir 5, pues: $3^2 + 4^2 = 5^2$.



—¡Comprendo! —dijo Pitágoras—. ¡Creo que conozco la razón de esta propiedad!

Y dibujo en un papiro esto:



Como puedes ver, ¡Pitágoras volvió a descubrir lo que había sido revelado al escribano Beder!

Al regreso a Grecia, Pitágoras divulgó este secreto del triángulo rectángulo. En honor a él se le puso el nombre de *Teorema de Pitágoras* y lo usamos hasta el día de hoy.

4

El Inca en la montaña

El emperador inca Tupac Yupanqui, quien inició la construcción de Ingapirca (*Pared del Inca*), quería tallar su rostro en una de las caras de la montaña.

—¿Para qué, mi señor? —le preguntó el sacerdote, quien también era jefe de construcciones.

—Para atemorizar a las tribus enemigas —respondió Tupac Yupanqui—. Si ven desde lejos el rostro del emperador inca, no se atreverán a atacarnos. ¡Busca un lugar en la montaña, visible desde cualquier distancia!

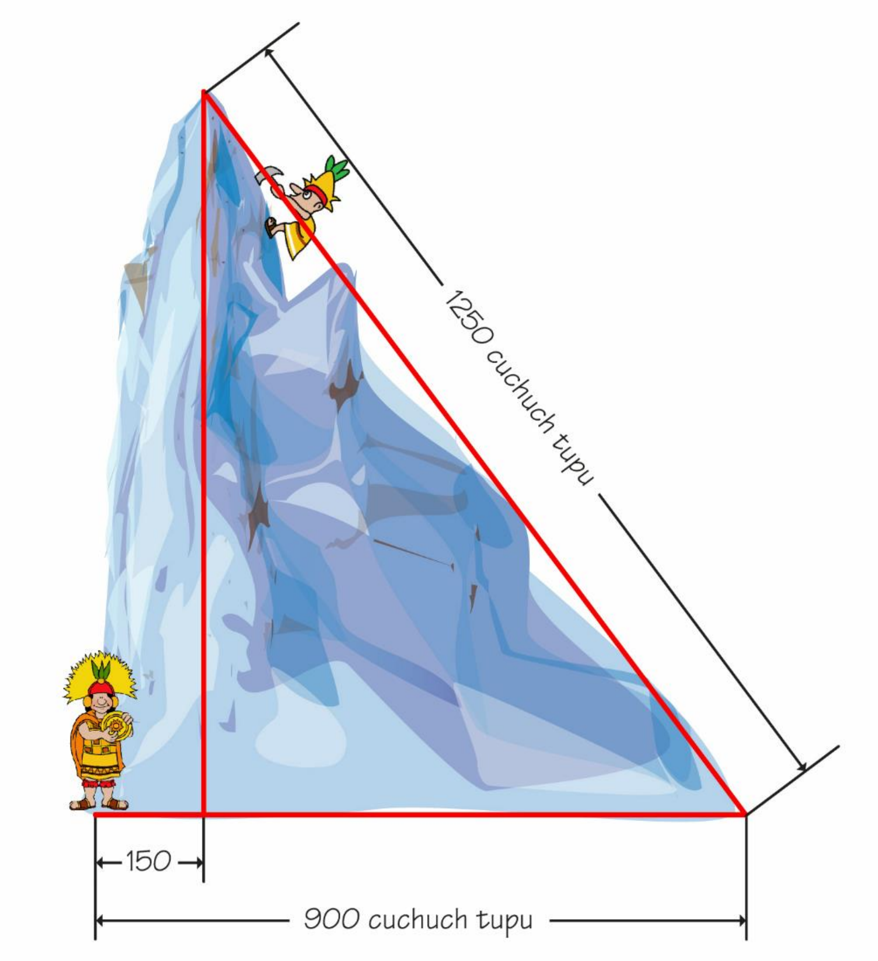
El lugar fue hallado y el sacerdote ordenó a sus constructores que fabricaran una cuerda con nudos. La distancia entre cada par de nudos debía medir un *cuchuch tupu*[4].

Junto con sus constructores y con la ayuda de la cuerda, el sacerdote midió la distancia entre la morada del emperador y el lugar de acenso a la montaña. Esta medía 900 cuchuch tupu.

El sacerdote ordenó a uno de sus constructores que escalara la montaña midiendo el recorrido con la cuerda. Este resultó medir 1250 cuchuch tupu.

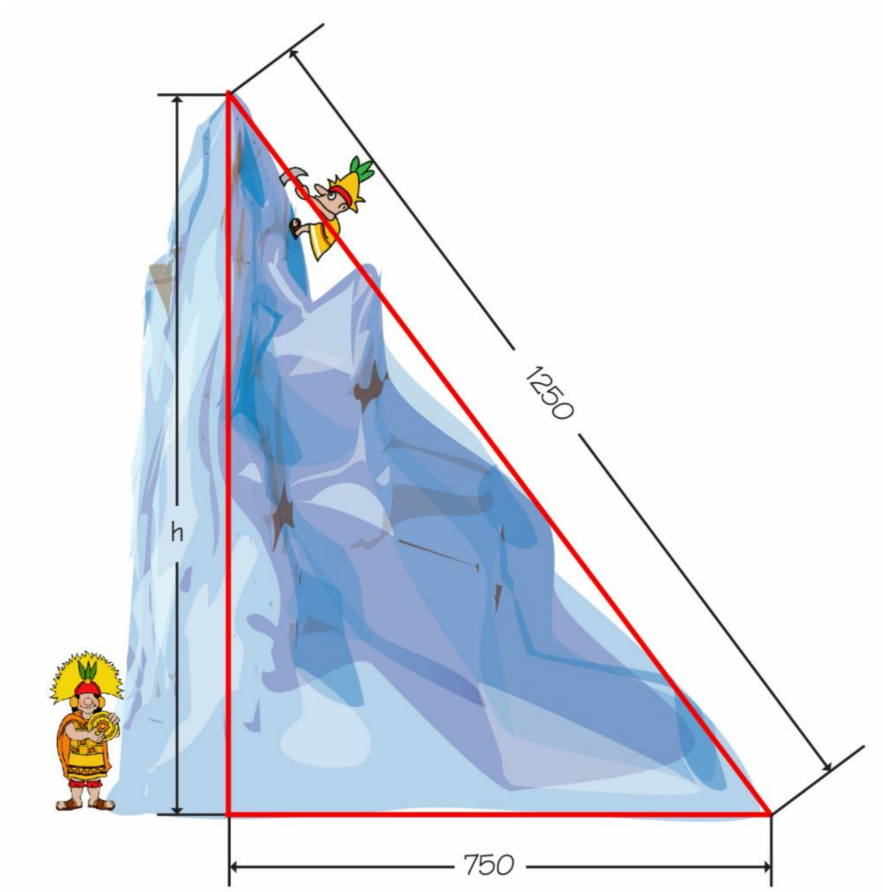
Por último, el sacerdote midió personalmente la distancia de 150 cuchuch tupu que existía entre la morada del emperador y la base de la montaña.

[4]Un *cuchuch tupu* equivale a un codo.



—¿A qué altura será esculpido mi rostro? —preguntó Tupac Yupanqui.
—A la altura de 1000 cuchuch tupu, —respondió el sacerdote.
¿Cómo lo supo? ¿Podrías descubrirlo?

Este es el triángulo, que se formó entre el acenso por la montaña, su base y su altura:



La hipotenusa mide 1250 cuchuch tupu, mientras que uno de los catetos mide 750. Necesitas conocer la medida del otro cateto, al cual, por el momento, puedes llamar h.

Aplicando el teorema de Pitágoras, obtendrás lo siguiente:

$h^2 + 750^2 = 1250^2$

Es decir:

$h^2 = 1562500 - 562500 = 1000000$, o:

$h = 1000\ cuchuch\ tupu$

Has llegado a descubrir que:

La altura de la montaña es de 1000 cuchuch tupu.

Como puedes ver, ¡el Teorema de Pitágoras ayuda eficazmente en los asuntos de guerra!

—¡El rostro del emperador inca estará en la cumbre de la montaña! —afirmó el sacerdote—. Y será observado desde cualquier distancia por las tribus enemigas.

Esta estrategia dio buenos resultados hasta la llegada de los españoles.

5

Operaciones más frecuentes con regla y compás

Euclides inicia su libro *Los Elementos* con los siguientes cinco postulados:

Postulado I
Por dos puntos siempre se puede trazar una (y solo una) recta.

Postulado II
Una recta puede ser prolongada indefinidamente.

Postulado III
Siempre se puede describir una circunferencia, dado un centro y un radio.

Postulado IV
Todos los ángulos rectos son iguales.

Postulado V
Si una recta, que corta a otras dos, forma ángulos interiores con estas (del mismo lado), cuya suma es menor que dos rectos; las dos rectas, si se prolongan indefinidamente, se cortarán del lado en que la suma es menor que dos ángulos rectos.

Con ayuda de estos postulados, Euclides aprende a hacer todo lo que sabían hacer los tendedores de cuerda egipcios. ¿Quieres saber cómo lo logra? ¡Entonces, presta atención!

Antes que nada, Euclides demuestra tres casos de igualdad de triángulos. Son los siguientes:

Proposición

Primer caso de igualdad de triángulos
"Si dos triángulos tienen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos respectivamente iguales, los triángulos son iguales".

Proposición

Segundo caso de igualdad de triángulos
"Si dos triángulos tienen un lado igual y, respectivamente iguales los ángulos adyacentes a ese lado, tales triángulos son iguales".

Proposición

Tercer caso de igualdad de triángulos
"Si los tres lados de un triángulo son iguales, respectivamente, a los tres lados de otro triángulo, tales triángulos son iguales".

Euclides también demuestra la siguiente proposición:

Proposición

"Si una recta, que atraviesa a otras dos, forma con éstas ángulos alternos iguales, las dos rectas serán paralelas".
Euclides usará todas estas propiedades en las construcciones que siguen.

Proposición

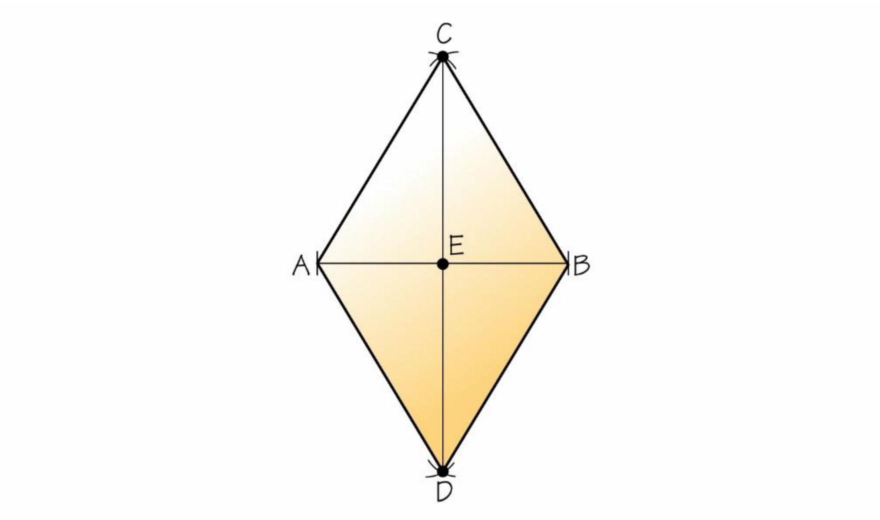
Biseque una recta finita.
Sea AB un segmento de recta que se desea bisecar.

Construcción

Con ayuda de un compás, Euclides traza:

$$AC = BC = AD = BD = AB$$

Usando la regla une los puntos C y D.
La recta CD interseca a la recta AB en el punto E.



¡Euclides afirma que E es el punto medio de AB!

Demostración

Los triángulos ACD y CBD son iguales, pues sus tres lados son iguales respectivamente. Por lo tanto, el ángulo ACE es igual al ángulo ECB. Entonces, también son iguales los triángulos ACE y ECB, pues sus dos lados y el ángulo comprendido son iguales respectivamente. Por consiguiente, el ángulo CEA es igual al ángulo CEB; y, como suman dos rectos, cada uno es un ángulo recto.

Proposición

Establecer una perpendicular a la recta dada en un punto dado.
Sea l una recta y A un punto sobre ella, en el cual queremos establecer la perpendicular.

Construcción

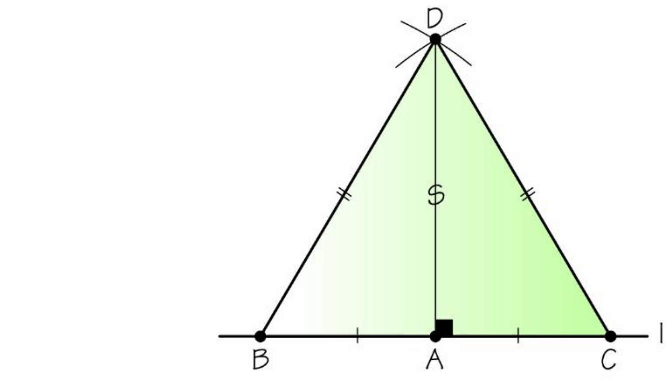
- Con ayuda del compás Euclides traza:

$AB = AC$

- Con ayuda del compás también traza:

$BD = CD = BC$

- Con la regla une los puntos A y D.



¡Euclides afirma que el ángulo A es recto!

Demostración

Los triángulos ADB y ADC son iguales, pues sus tres lados son iguales respectivamente. Por lo tanto, el ángulo DAB es igual al ángulo DAC; y, como suman dos rectos, cada uno es un ángulo recto.

Proposición

Trazar una recta, perpendicular a otra, desde un punto exterior.
Sea l una recta, A un punto fuera de ella.

Construcción

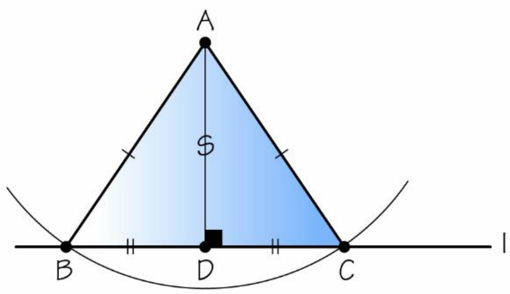
- Con ayuda del compás, Euclides traza:

$AB = AC$

- Construye el punto D, tal que:

$BD = CD$

- Con la regla une los puntos A y D.



¡Euclides afirma que el ángulo D es recto!

Demostración

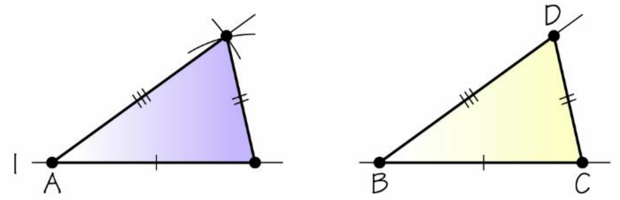
Los triángulos ADB y ADC son iguales, pues sus tres lados son iguales respectivamente. Por lo tanto, el ángulo ADB es igual al ángulo ADC; y, como suman dos rectos, cada uno es un ángulo recto.

Proposición

Sobre una recta construir un ángulo igual a otro dado.
Sea B un ángulo, l una recta con un punto A sobre ella.

Construcción

- Con ayuda del compás, sobre los lados del ángulo B Euclides marca segmentos BC y BD, y une los puntos D y C.
- Traslada los tres segmentos a la recta l y el punto A:



¡Euclides afirma que el ángulo A es igual al ángulo B!

Demostración

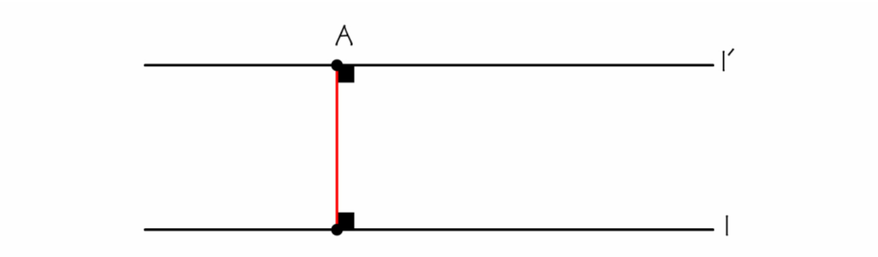
Los dos triángulos son iguales, pues sus tres lados son iguales respectivamente. Por lo tanto, el ángulo A es igual al ángulo B.

Proposición

Trazar una recta paralela a la dada, por un punto fuera de ella.
Sea l una recta, y A un punto fuera de ella.

Construcción

- Desde el punto A, Euclides baja una perpendicular a la recta l.
- Euclides establece una perpendicular a esta perpendicular en el punto A. Obtiene la recta l'.



¡Euclides afirma que la recta l' es paralela a la recta l!

Demostración

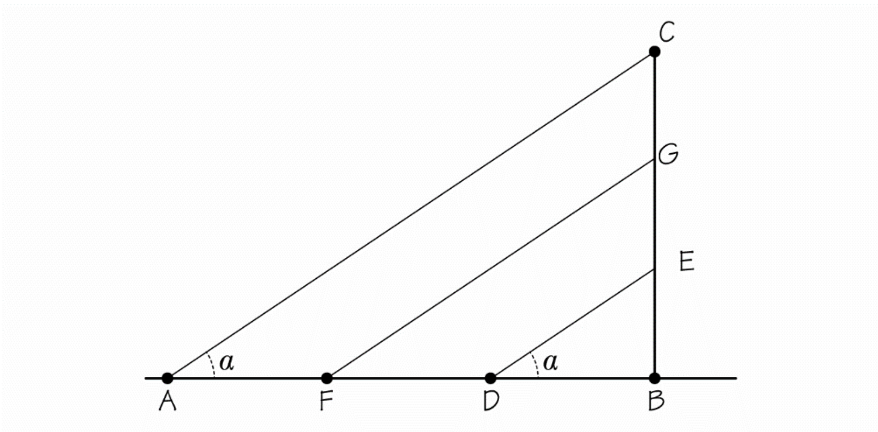
Como las rectas l y l' poseen los ángulos alternos iguales, las dos rectas son paralelas.

Proposición

Dividir una línea recta en cualquier número de partes iguales.
Sea AB una recta, a la cual se la quiere dividir en 3 partes iguales.

Construcción

- En el punto B, Euclides establece una perpendicular a la recta AB.
- Sobre la recta obtenida, marca tres segmentos, $BE = EG = GC$, cuya magnitud escoge arbitrariamente.
- Une los puntos A y C por medio de la regla.
- Por los puntos E y G traza rectas paralelas a AC. Obtiene los puntos F y D.



¡Euclides afirma que los puntos F y D dividen a la recta AB en tres partes iguales!

Demostración

Como las rectas AC y DE son paralelas, los triángulos DBE y ABC son semejantes. Por el teorema de Tales, sus catetos mantienen la misma proporción:

$$\frac{EB}{DB} = \frac{CB}{AB}$$

Intercambiando los términos de la proporción, Euclides obtiene:

$$\frac{EB}{CB} = \frac{DB}{AB}$$

Pero, por construcción:

$$\frac{EB}{CB} = \frac{1}{3}$$

De modo que, también:

$$\frac{DB}{AB} = \frac{1}{3}$$

¡Y eso es lo que se quería demostrar!

De este modo Euclides aprendió a realizar, con regla y compás, todas las operaciones que los agrimensores egipcios ejecutaban con la cuerda de trece nudos.

6

El príncipe condenado

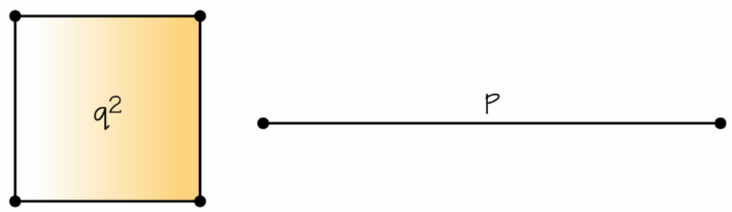
Hubo una vez en Egipto un rey que no tenía hijos. Visitó todos los templos del país, haciendo ofrendas a los dioses y rogándoles un heredero. Por último, los dioses le dijeron:

—Dedícanos un templo de base rectangular y concebirás un hijo.

—¿De qué área y perímetro debo edificar el templo? —preguntó el rey.

—De la misma área que tiene la piscina de tu palacio y del mismo perímetro que tiene tu jardín.

La piscina era cuadrada, y, a escala, la piscina y el semiperímetro del jardín se veían de este modo:



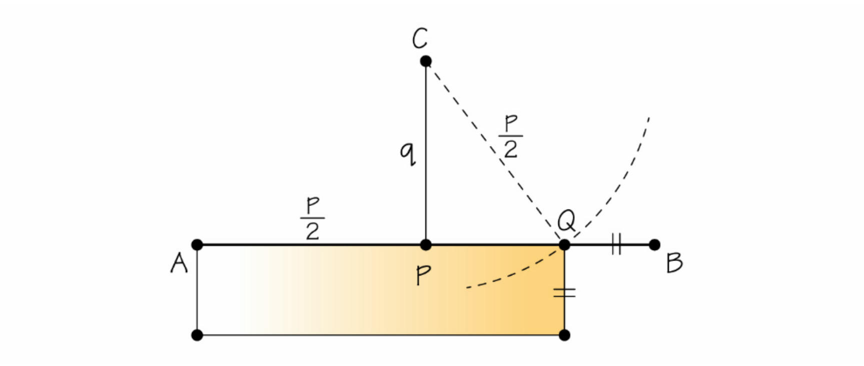
—¿Cómo trazar un rectángulo que tenga la misma área de la piscina y el mismo perímetro que el jardín? —se preguntaba el rey.

—En el Museo trabaja un sabio que se llama Euclides —le dijeron los ministros—. Él, con seguridad, podrá trazar el rectángulo que necesita su majestad.

El rey fue a ver a Euclides personalmente.

—¡La solución es muy simple! —dijo Euclides, una vez que se enteró del problema.

Tomó una regla, un compás, e hizo los siguientes trazos:



- Construyó, con regla y compás, el punto medio P del segmento AB, el cual representa el semiperímetro del rectángulo a construir.
- En el punto P elevó una perpendicular de longitud q, obteniendo el punto C.
- Desde el punto C como centro, trazó un círculo de radio $AP = \frac{p}{2}$, el cual intersecó a la recta AB en el punto Q.

—¡Los segmentos AQ y QB son los lados de la base rectangular del templo! —afirmó Euclides.

Y dio al rey la siguiente demostración. ¡Ayúdale a realizarla, por favor!

Euclides desea demostrar que el rectángulo de lados AQ y QB posee la misma área que tiene la piscina del palacio del rey, es decir q^2, y el mismo semiperímetro que su jardín, es decir p. En otras palabras, Euclides debe demostrar que

$$AQ \cdot QB = q^2$$
$$AQ + QB = p$$

¡La segunda igualdad se cumple por construcción! Para demostrar la primera, Euclides usa el Teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo CPQ. Escribe:

$$AQ \cdot QB = \left(\frac{p}{2} + PQ\right) \cdot \left(\frac{p}{2} - PQ\right) = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - PQ^2 = q^2$$

Anota la respuesta del geómetra alejandrino:

> **El rectángulo de lados AQ y QB, que acaba de ser construido con regla y compás, posee el área q^2 y el semiperímetro *p*, tal y como era requerido.**

¡El método de Euclides resolvió el problema brillantemente!, ¿verdad?

En términos algebraicos, Euclides acaba de resolver con regla y compás una ecuación cuadrática. En efecto, sabes que:

$$AQ = p - QB$$

Entonces,

$$AQ \cdot QB = (p - QB) \cdot \mathrm{QB} = p \cdot QB - QB^2 = q^2$$

Si llamas *x* al segmento QB, puedes escribirlo así:

$$x^2 - px + q^2 = 0$$

¡Se obtuvo una ecuación cuadrática! Euclides incluyó esta construcción como la proposición 28 del Libro VI de sus *Elementos*.

El rey hizo construir el templo y nueve meses más tarde su reina dio a luz a un precioso niño. Pero la alegría de los padres fue nublada por el presagio que le hizo una maga:

—Le matará una serpiente.

El rey quedó consternado por esta noticia, y, cuando el príncipe llegó a la juventud, le reveló la profecía.

—¡Evita salir al mundo! —le dijo—. Así huirás del peligro.

Pero el príncipe no se asustó.

—¿Por qué debo huir del mundo? —dijo—. Si estoy destinado a morir, nada podrá evitarlo. Pero creo que, si estoy atento de día y de noche, tal vez los dioses hagan que la desgracia no suceda.

Y vivió una vida activa y feliz.

Una noche, mientras el príncipe dormía, una serpiente venenosa salió de una grieta que había en el muro, y se deslizó hacia la cama. Rápidamente, el príncipe tomó un jarro de vino que estaba junto a la cabecera, llenó un cuenco y lo depositó en el suelo, por donde pasaría la serpiente. Esta hundió su cabeza en el cuenco y se bebió todo el vino. ¡Quedó tan mareada que no podía moverse! El príncipe sacó su espada y se precipitó sobre la serpiente para despedazarla.

De este modo pudo probar que la atención es un poder que supera al destino.

7

El galgo manso

Un rey de Alejandría estaba feliz al ver nacer a su príncipe heredero. Pero se quedó de una sola pieza al escuchar el presagio de las Siete Hathores:

—Le matará un perro.

El rey se sintió desolado, pero decidió actuar para salvar a su hijo.

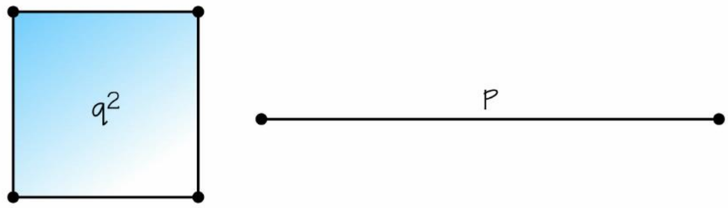
—¿Qué debo hacer? —preguntó a los dioses.

—Construye para el niño un palacio en el desierto oriental, —contestaron los dioses—. Que él viva allí con todos sus sirvientes. Rodea el palacio por un muro rectangular y nunca le permitas traspasarlo.

—¿Qué longitud debe poseer el muro y qué área debe abarcar? —preguntó el rey.

—La misma área que tu palacio y la diferencia de sus dos lados debe igualar el largo de tu caballeriza principal.

El palacio del rey tenía la forma de un cuadrado y, a escala, el palacio y el largo de la caballeriza se veían de este modo:

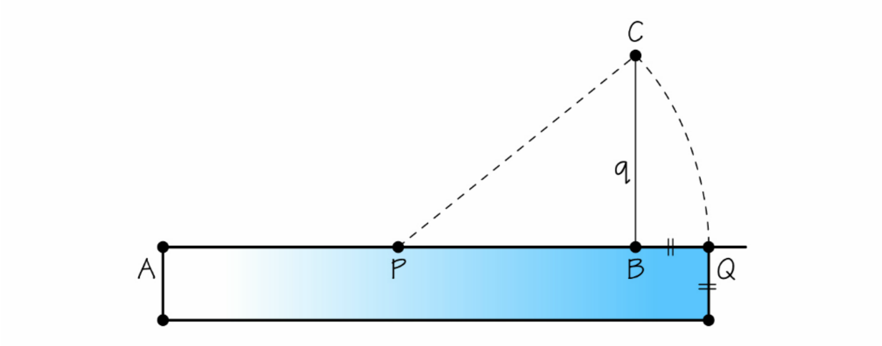


—¿Cómo trazar un rectángulo que tenga la misma área de mi palacio y la misma diferencia de lados que mi caballeriza? —se preguntaba el rey.

—Llama al sabio Euclides, —le dijeron los ministros—. Él, sin lugar a dudas, podrá trazar el diseño del muro que necesita su majestad.

Cuando Euclides se enteró del problema, exclamó:

—¡La solución es muy simple!
Tomó una regla, un compás, e hizo los siguientes trazos:



- Construyó, con regla y compás, el punto medio P del segmento AB, el cual representa la diferencia de lados del rectángulo a construir.
- En el punto B elevó una perpendicular de longitud q, obteniendo el punto C.
- Desde el punto P como centro, trazó un círculo de radio PC, el cual intersecó a la prolongación de la recta AB en el punto Q.

—¡Los segmentos AQ y QB son los lados del muro! —afirmó Euclides.
Y dio al rey la siguiente demostración. ¡Ayúdale a realizarla, por favor!

Euclides desea demostrar que el rectángulo de lados AQ y QB posee la misma área que el palacio del rey, es decir, q^2, y la misma diferencia de lados que su caballeriza principal, es decir, p. En otras palabras, Euclides debe demostrar que:

$$AQ \cdot QB = q^2$$
$$AQ - QB = p$$

¡La segunda igualdad se cumple por construcción! Para demostrar la primera, Euclides aplica el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo PBC. Escribe:

$$AQ \cdot QB = \left(PQ + \frac{p}{2}\right) \cdot \left(PQ - \frac{p}{2}\right) = PC^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = q^2$$

Anota la respuesta del geómetra alejandrino:

> **El rectángulo de lados AQ y QB, que acaba de ser construido con regla y compás, posee el área q^2 y la diferencia de sus lados iguala a *p*, tal y como era requerido.**

¡El método de Euclides resolvió el problema brillantemente!, ¿verdad?
En términos algebraicos, Euclides acaba de resolver con regla y compás una ecuación cuadrática. En efecto, sabes que:

$$AQ = p + QB$$

Entonces,

$$AQ \cdot QB = (p + QB) \cdot \mathrm{QB} = p \cdot QB + QB^2 = q^2$$

Si llamas x al segmento QB, puedes escribirlo así:

$$x^2 + px - q^2 = 0$$

¡Sin saberlo, Euclides resolvió geométricamente una ecuación cuadrática! El geómetra griego incluyó esta construcción como la proposición 29 del Libro VI de sus *Elementos.*

El rey hizo construir el palacio y, como al niño nunca se le permitió salir de él, no supo lo que era un perro hasta que hubo cumplido los siete años.

Un día fue en busca de alguna salida en el tejado del palacio. Desde allí podía observar la roja arena del desierto. Pero, de pronto, vislumbró a un hombre que caminaba con un perro retozando a sus pies. El príncipe quedó fascinado, no podía desviar su atención del perro. Cuando uno de los sirvientes subió al tejado en su busca, el pequeño preguntó:

—¿Qué es eso que sigue al hombre por el camino?

El sirviente no quería contestarle, pero finalmente dijo:

—Alteza, es un galgo.

Entonces, el pequeño dijo:

—¡Tráeme uno exactamente igual a ese!

Aunque el rey se opuso tenazmente a la idea, tuvo que complacer al hijo.

—Llevad al príncipe el perrito más pequeño que encontréis —dijo a los sirvientes.

El príncipe estaba fascinado con su perrito y jugaba con él durante todo el día. Al principio, los sirvientes rondaban en torno a él y al perrito, por si en algún momento este intentaba morder al pequeño. Pero el perro creció haciéndose cariñoso y dócil, y todos olvidaron el peligro.

A la muerte de su padre, el príncipe tomó el mando y gobernó el país de modo activo y justo.

Una mañana fue a dar un paseo por sus tierras. Su galgo le acompañaba jugueteando a sus pies. En un lugar alejado de los jardines de palacio, el príncipe se detuvo para admirar un lago bordeado de palmeras y dio a su perro un tirón. De pronto, este comenzó a gruñir. Sus ojos brillaron y habló:

—¡Príncipe, yo soy tu destino!

Saltó a su cuello y el príncipe corrió desesperado con el galgo tras él. Se metió en el lago, y el galgo, burlado, se quedó gruñendo junto a la orilla.

Al escuchar los ladridos del galgo, el guardia del palacio supo que algo no marchaba bien. Enseguida corrió al lugar de donde provenía el alboroto y, conforme a las órdenes del príncipe, clavó una flecha en la garganta del galgo, que murió instantáneamente. El príncipe salió a la orilla sano y salvo.

A pesar de todo lo acontecido, el príncipe lloró la muerte de su perro, e hizo que fuera enterrado por uno de los sirvientes de la corte.

8

El punto de equilibrio

Euclides enseñaba la Ciencia Geométrica en el Museo de Alejandría.

En cierta ocasión surgió una tertulia acerca de la relación del individuo con los demás. Uno de los discípulos dijo:

—En mi opinión, los demás son más importantes que yo.

Otro discípulo aportó:

—¡En cambio, yo no hago caso a los demás! Lo que dicen me parece irrelevante.

—¡Ambos están equivocados! —dijo Euclides—, pues ambos están en un extremo. Un sabio debe buscar el punto de equilibrio.

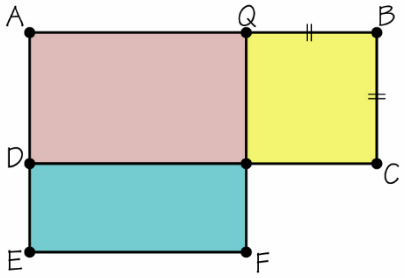
—¿Y cuál es el punto de equilibrio? —preguntaron los dos discípulos.

—Es parecido al punto que divide una recta en extrema y media razón —dijo Euclides—. Es el único punto que logra el equilibrio entre lo externo y lo interno.

Y dio a sus discípulos la siguiente explicación. ¡Ayúdale a realizarla, por favor!

Al tomar la regla y el compás, Euclides trazó el segmento $AB = p$, para representar la recta que se quiere dividir en extrema y media razón.

—¿Qué significa dividir un segmento AB en extrema y media razón? —dijo Euclides—. Significa construir en él un segmento AQ que posea la siguiente propiedad: que el cuadrado AQFE, construido sobre él, tenga la misma área que el rectángulo ABCD, cuyo lado BC sea igual a QB.



—¿Cómo construimos el segmento AQ? —preguntaron los discípulos.

—¡Usando inteligentemente la proposición 29 del Libro VI de los *Elementos*! —dijo Euclides—. Nos permite construir con regla y compás un rectángulo que posee el área p^2 y la diferencia p entre sus lados.

Sobre el segmento AB Euclides trazó, con regla y compás, el cuadrado ABHI y el rectángulo IMJK con dicha propiedad. El rectángulo intersecó al segmento AB en el punto L. Entonces, sabes que se cumple lo siguiente:

$AL \cdot IK = AB^2$
$IK \cdot KJ = AB$

La segunda igualdad significa que:

$IK - \mathrm{AL} = AB$

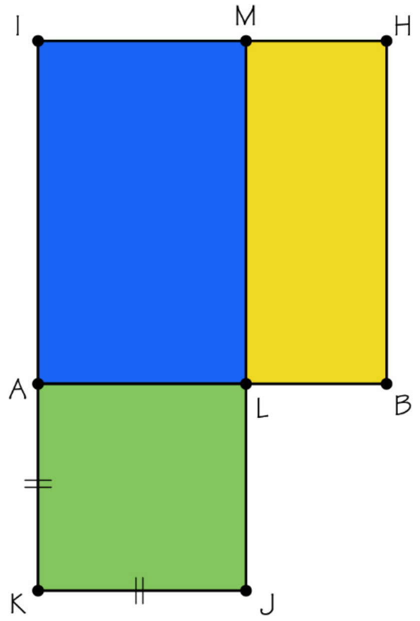
Pero, también:

$IK - \mathrm{AL} = AB$

Por lo tanto,

$A\mathrm{L} = AK$

¡Es decir, ALJK es un cuadrado!



—¡Yo afirmo que L es el punto buscado Q! —dijo Euclides—. En otras palabras, el punto L divide a la recta AB en extrema y media razón. Es decir, se cumple la siguiente igualdad:

$$AL^2 = AB \cdot BL$$

Y lo demostró del siguiente modo.
Lo que está por demostrarse es la igualdad:

$$AL^2 = (AL + BL) \cdot BL$$

En términos equivalentes, esto significa:

$$AL^2 = AL \cdot BL + BL^2$$

Para lograrlo, Euclides recuerda que, por construcción:

$$AB^2 = AL \cdot IK$$

Es decir:

$$AB^2 = AL \cdot (AB + AL)$$

También lo puede escribir de este modo:

$$(AL + BL)^2 = AL \cdot (AL + BL) + AL^2$$

Euclides desarrolla el cuadrado de la suma:

$$AL^2 + 2AL \cdot BL + BL^2 = AL^2 + AL \cdot BL + AL^2$$

Simplifica la expresión:

$$AL \cdot BL + BL^2 = AL^2$$

Intercambia el lado izquierdo con el derecho:

$$AL^2 = AL \cdot BL + BL^2$$

¡Y esto es, precisamente, lo que Euclides quería demostrar! Anota la respuesta del geómetra alejandrino:

> **El punto L, que acaba de ser construido con regla y compás, divide al segmento AB en extrema y media razón.**

Euclides incluyó esta construcción como la Proposición 30 del Libro VI de sus *Elementos*. ¡Su método resolvió el problema brillantemente!, ¿verdad?

—Y de la misma manera que pueden construir el punto de equilibrio de un segmento, procuren hallar el punto de equilibrio en su alma —dijo Euclides—. Las demás personas son importantes, pero no demasiado. Solo les informan algo sobre ustedes mismos, y tienen que aprender a traducirlo.

—Por ejemplo, ves a un mendigo sucio. En ti surge el pensamiento: "¡Qué sucio es ese hombre!". Se traduce como: "Me gustaría permitirme un poco de desaseo". Alguien es indisciplinado, y le dices: "¡Qué indisciplinado eres!". Se traduce como: "Me vendría bien un poco de soltura". Tienes un amigo avaro y tu mente dice: "¡Qué avaro es este tipo!". Traduce como: "Me encantaría ser un poco más medido con los demás". ¡Si haces así, alcanzarás el punto de equilibrio!

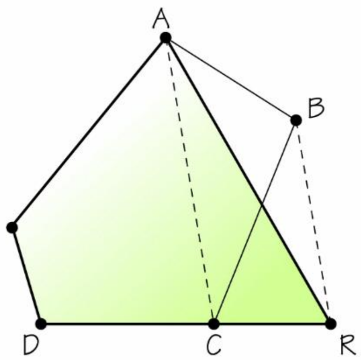
En manos de Euclides, la Geometría ayudaba a comprender cómo funciona nuestra mente.

9

Transformación de áreas

En la Academia de Platón se descubrió un método para comparar las áreas de polígonos, usando únicamente la regla y el compás. La idea perteneció a Euclides, y es la siguiente.

El geómetra griego considera un polígono ABCD...



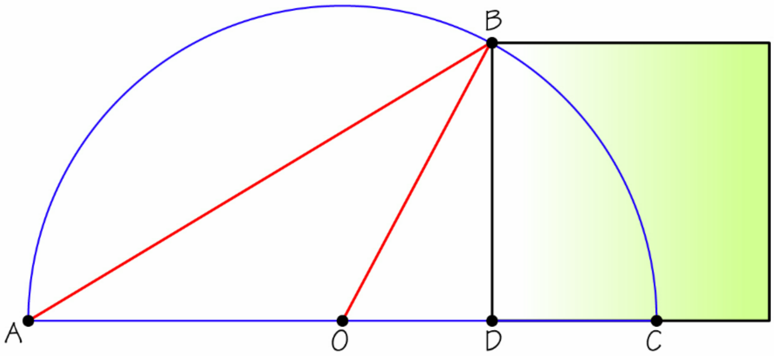
Con el objeto de construir un polígono de la misma área, pero con un vértice menos, Euclides procede a eliminar el vértice C. Usando la regla y el compás, traza la recta BR paralela a la diagonal AC (R es el punto donde la recta corta la prolongación del lado DC).

Como los triángulos ABC y ARC tienen en común la base AC, y sus alturas sobre esa base común también son iguales, esos triángulos poseen la misma área. Por lo tanto, el polígono ABCD y ARD abarcan la misma área. ¡Pero el polígono nuevo cuenta con un vértice menos que el polígono original!

Si se repite este proceso, Euclides logrará obtener un triángulo de la misma área que el polígono inicial. Euclides llama b a cualquiera de sus lados, y h a la altura correspondiente. Entonces construye el lado del cuadrado de área equivalente como la media proporcional entre b y $\frac{h}{2}$, pues:

$$A_{\Delta} = b \cdot \frac{h}{2} = \sqrt{b \cdot \frac{h}{2}} \cdot \sqrt{b \cdot \frac{h}{2}}$$

¿Cómo se puede construir la media proporcional de dos segmentos con regla y compás? Euclides demuestra que, al dividir el diámetro de un semicírculo en dos segmentos, AD y DC, la perpendicular BD, establecida en el punto de la división, será la media geométrica de dichos segmentos. Es decir, su cuadrado, BD^2, tendrá el área del rectángulo $AD \times DC$.
Para probarlo, Euclides traza los segmentos AB y BC. Sabes que el triángulo ABC es rectángulo, pues se apoya en una semicircunferencia (Euclides lo demuestra en la proposición 22 de Libro III de sus *Elementos*):



¿Qué significa eso? ¡Que los triángulos ABD y BDC son similares! ¿Por qué? Porque la suma de los ángulos A y ABD es igual a un ángulo recto; pero también lo es la suma de los ángulos ABD y DBC:

$$\measuredangle A + \measuredangle ABD = 90°$$
$$\measuredangle ABD + \measuredangle DBC = 90°$$

¿Qué puedes concluir de ello? ¡Que el ángulo A tiene que ser idéntico al ángulo DBC!

$$\measuredangle A = \measuredangle DBC$$

Por el Teorema de Tales, puedes escribir:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{BD}{DC}$$

O, lo que es lo mismo, que:

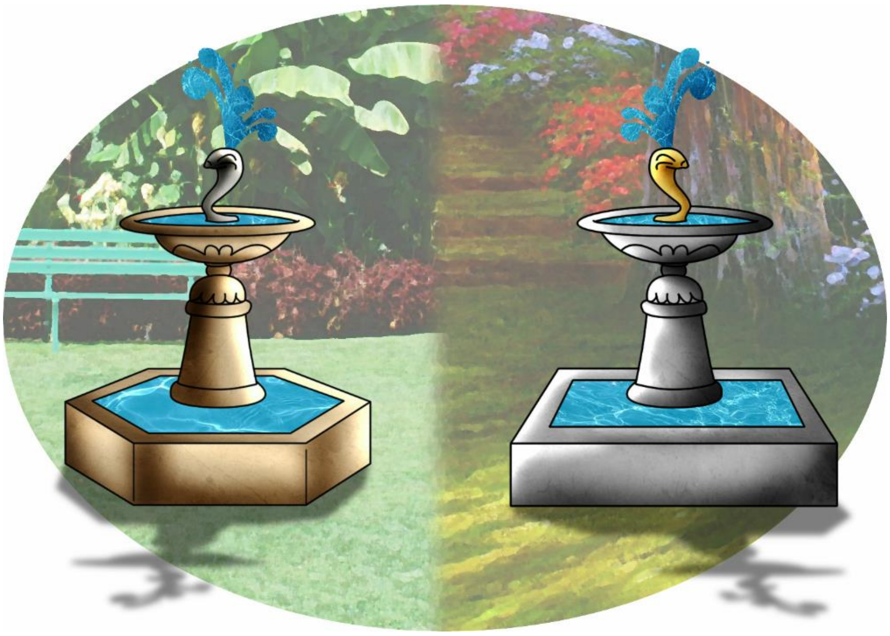
$$BD^2 = AD \times DC$$

¡Y esto significa que la perpendicular BD es la media geométrica de los segmentos AD y DC!

Euclides ha logrado su propósito: el polígono inicial ha sido transformado en un cuadrado de la misma área. Anota la respuesta del geómetra griego:

> **Siguiendo el proceso descrito, se logra transformar cualquier polígono en un cuadrado de la misma área, usando exclusivamente la regla y el compás.**

¡El método de Euclides para comparar áreas es genial!, ¿verdad?



10

Las dos piletas

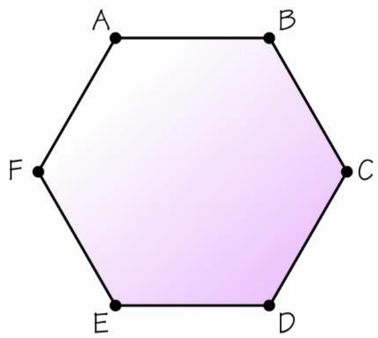
Un arquitecto se enamoró de la hija del rey y decidió pedir su mano. El rey tenía mucha pasión por la Geometría y ordenó al arquitecto que construyera dos piletas de agua de la misma altura. La primera pileta debía tener la forma de un hexágono regular y sería colocada en el jardín norte del palacio real, mientras que la segunda pileta tendría la forma de un cuadrado y sería colocada en el jardín sur.

—¡Y me gustaría que las dos piletas se llenen con la misma cantidad de agua! —dijo el rey.

—“Puesto que la altura de las piletas será la misma, el volumen de agua dependerá únicamente de la superficie de la pileta” —pensó el arquitecto—. “Entonces, mi problema se reduce a buscar un hexágono y un cuadrado que tengan la misma área”.

Pero ¿cómo hacer que un cuadrado abarque la misma área que un hexágono? ¡Ayuda al arquitecto a averiguarlo, por favor!

El arquitecto traza sobre el papel un hexágono regular ABCDEF.



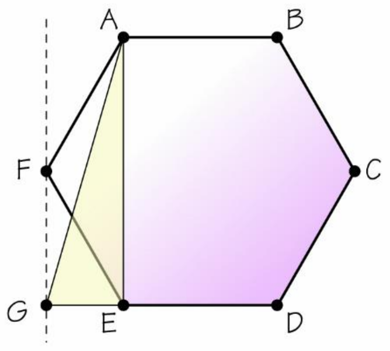
Su tarea ahora consiste en construir, con regla y compás, un cuadrado de la misma área. ¡El método de Euclides viene en tu ayuda!

Como recordarás, el geómetra griego te sugiere que elimines, uno tras otro, los vértices del hexágono, de modo que su área no cambie, hasta que obtengas un triángulo. Luego, al construir la media geométrica entre la base y la mitad de la altura del triángulo, obtendrás un cuadrado de la misma superficie que el triángulo.

Dado el hexágono ABCDEF, empieza eliminando, por ejemplo, el vértice F. Lo puedes hacer de la siguiente manera:

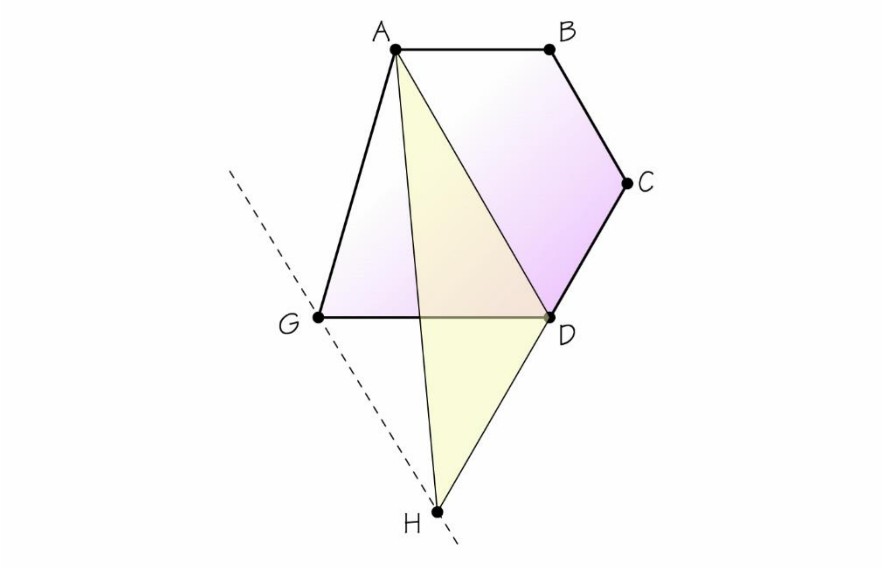
- Traza la diagonal AE.
- Por el punto F traza una recta paralela a la diagonal AE.
- Prolonga el lado DE hacia la izquierda.
- La recta DE intersecará a la paralela en el punto G.
- ¡El pentágono ABCDG posee la misma superficie que el hexágono ABCDEF!

En efecto: como los triángulos AEF y AEG tienen la misma superficie (por tener la misma base y altura), puedes concluir que las superficies del pentágono ABCDG y del hexágono ABCDEF son iguales.



Repite el procedimiento con el pentágono ABCDG para eliminar el vértice G.

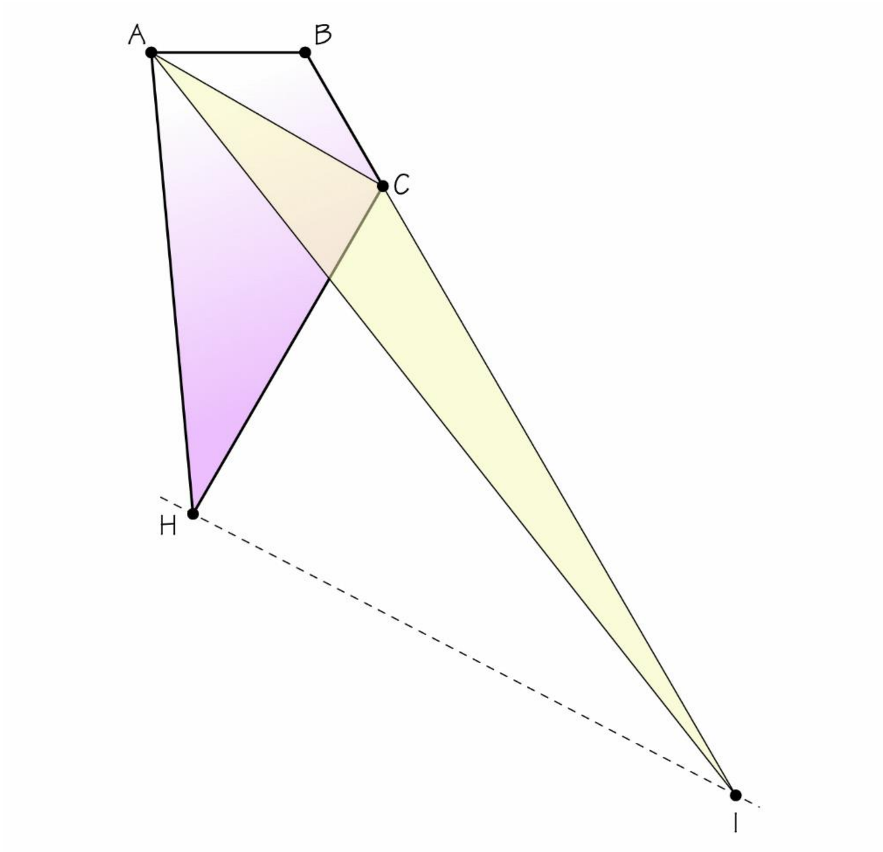
- Traza la diagonal AD.
- Por el punto G traza una recta paralela a la diagonal AD.
- Prolonga el lado CD hacia abajo.
- La recta CD intersecará a la paralela en el punto H.
- ¡El cuadrilátero ABCH posee la misma superficie que el pentágono ABCDG!



¿Por qué es así? Porque los triángulos ADG y ADH poseen la misma superficie, por tener la misma base y altura. ¡Puedes concluir que las superficies del pentágono ABCDG y del cuadrilátero ABCH son iguales!

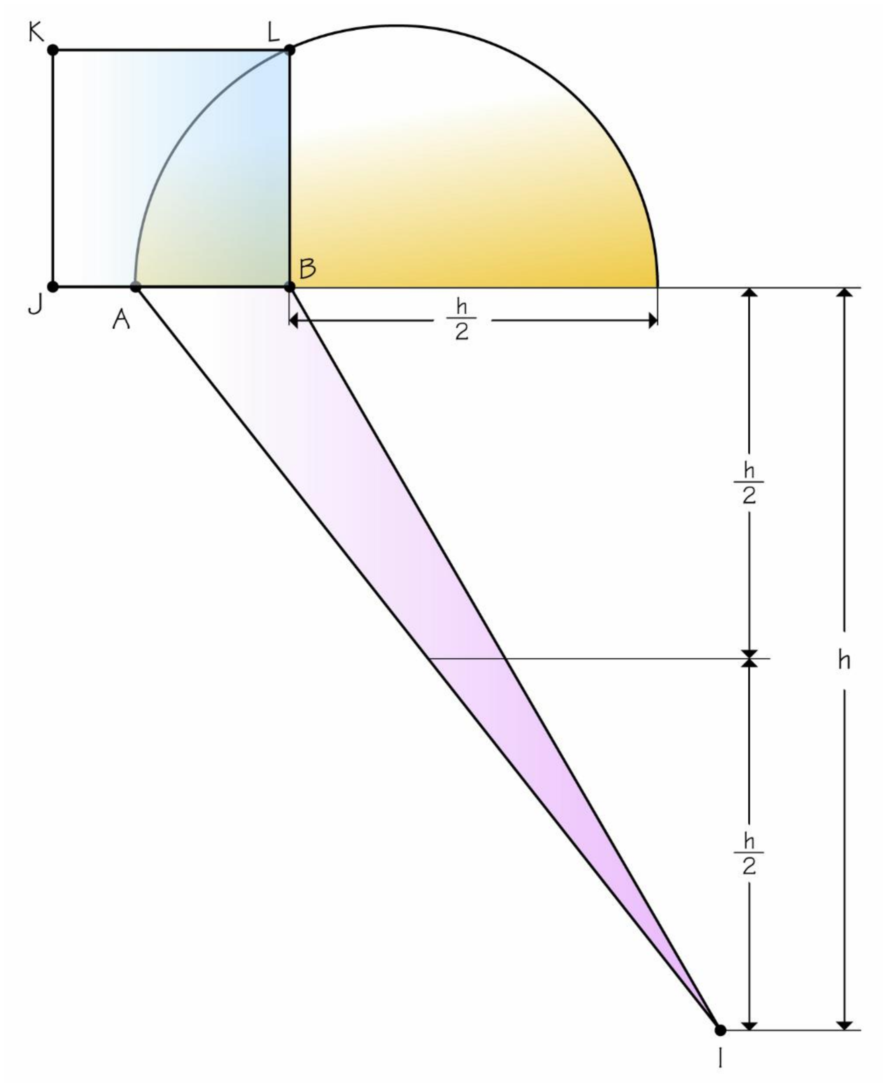
Repite el procedimiento con el cuadrilátero ABCH para eliminar, por ejemplo, el vértice H.

- Traza la diagonal AC.
- Por el punto H traza una recta paralela a la diagonal AC.
- Prolonga el lado BC hacia abajo.
- La recta BC intersecará a la paralela en el punto I.
- ¡El triángulo ABI posee la misma superficie que el cuadrilátero ABCH!

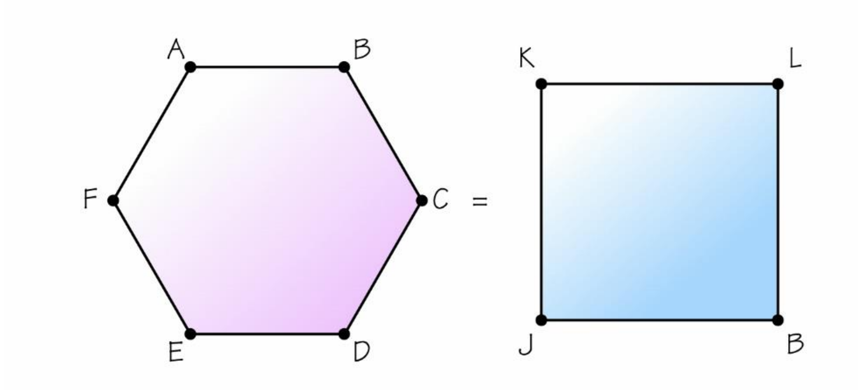


En efecto, como los triángulos ACH y ACI tienen la misma superficie, por tener la misma base y altura, has encontrado un triángulo que tiene la misma superficie que el hexágono. ¡Solo te falta convertir este triángulo en un cuadrado!

¿Cómo obtendrás, a partir del triángulo ABI, el cuadrado de la misma área? Por supuesto, ¡construyendo la media geométrica entre la base y la mitad de la altura del triángulo! Hazlo:



¡El cuadrado JKLB posee la misma superficie que el hexágono ABCDEF!



Anota este resultado:

La superficie del hexágono ABCDEF es igual a la superficie del cuadrado BJKL.

¡El método de Euclides resolvió el problema brillantemente!, ¿verdad?

El arquitecto realizó la construcción de las dos piletas y se casó con la hija del rey.

Es un hecho conocido que la construcción de cada una de las grandes obras de arquitectura fue motivada por un gran amor. El afán de un arquitecto siempre consiste en lograr que la vida de su amada sea tan longeva como la de la piedra.

¡Pero el amor es aún más eterno que las rocas! Porque el amor puede crear las rocas y las estrellas, más las rocas y las estrellas no pueden crear nada, son simples criaturas. El amor es el verdadero autor de este universo.

11

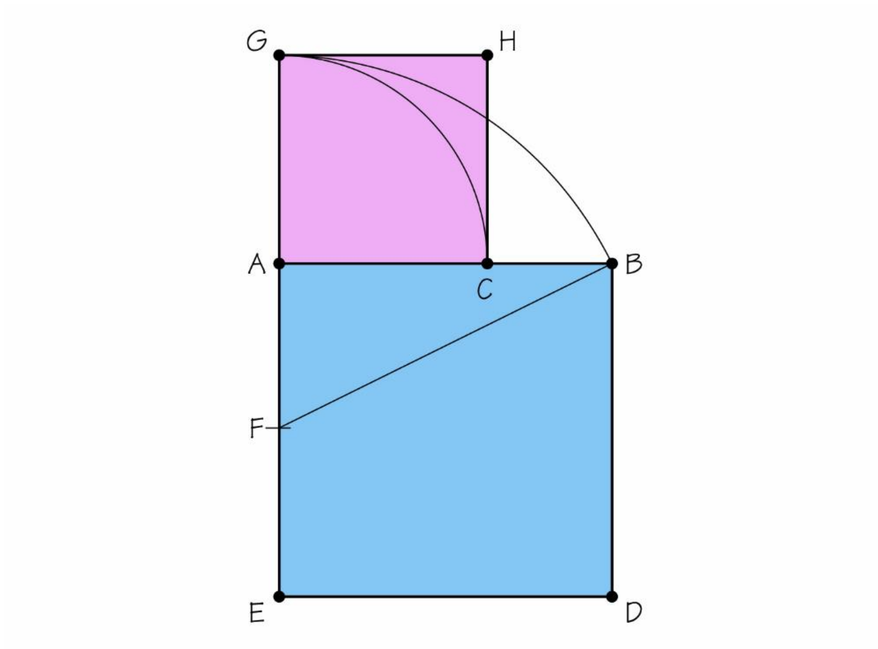
Un método algebraico para problemas geométricos

Una mañana René Descartes, un filósofo y matemático francés, leyó que los sacerdotes egipcios poseían un método para dividir un segmento en extrema y media razón. Imagina que el sacerdote recibía la siguiente orden divina:

> *¡Divide un segmento AB en extrema y media razón! Es decir, encuentra el punto C que tenga la siguiente propiedad:*

$$AC^2 = AB \times BC$$

El sacerdote procedía de la siguiente manera. Construía sobre el segmento AB el cuadrado ABDE. Con ayuda de la regla y el compás bisecaba el lado AE en dos mitades: AF y FE. Desde el punto F, tomado como centro, trazaba la circunferencia de radio FB hasta la intersección con la continuación del segmento EA, obtendrá de este modo el punto G. Por último, sobre el segmento AG, construía el cuadrado AGHC. ¡Obtenía el punto buscado C!



—¡Ya sé por qué el sacerdote egipcio procedía de este modo! —exclamó Descartes.

Tomó una hoja de papel, sumergió la pluma en el tintero y se puso a escribir. ¡Ayúdale en esta difícil tarea, por favor!

Descartes concibe una idea genial: dar un nombre a la longitud del segmento buscado, como si ya la conociéramos. Al tomar como unidad de medida la longitud del segmento AB, Descartes llama *x* a la longitud del segmento buscado AC. Entonces, usando el antiguo método algebraico de los babilonios, puede escribir:

$$x^2 = 1 \cdot (1 - x)$$

¡Se obtuvo una ecuación algebraica! Descartes se propone resolverla.
Para ello ejecuta la multiplicación. Obtiene:

$$x^2 + x - 1 = 0$$

¡Es una ecuación cuadrática! Para resolverla, Descartes completa el cuadrado:

$$\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

Despeja la incógnita:

$$x = AC = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Descartes comprueba que su repuesta es correcta:

$AC^2 = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 = \frac{5-2\sqrt{5}+1}{4} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

$AB \times BC = 1 \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

Sí: ¡su respuesta es correcta!

Ahora Descartes desea comparar su respuesta con la egipcia. Por construcción geométrica, se puede ver que:

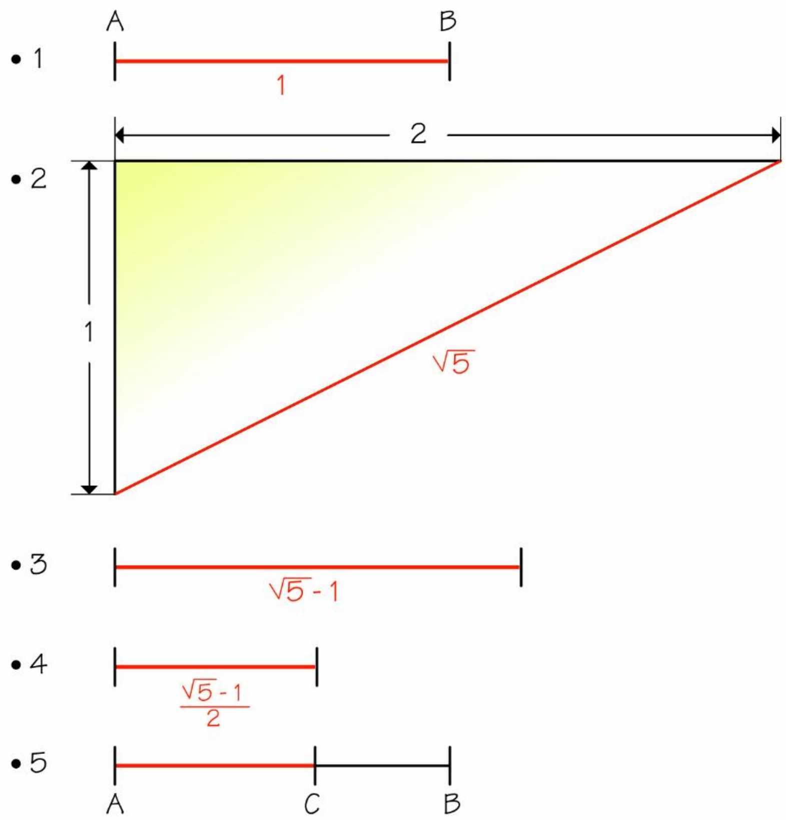
$AB \times BC = 1 \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

¡La respuesta egipcia coincide con la respuesta de Descartes! Anota la parte algebraica de esta:

> **El segmento AC que divide el segmento AB en extrema y media razón, mide $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ partes de segmento AB.**

¡El método algebraico descubrió la respuesta egipcia brillantemente!, ¿verdad?

Descartes está listo para construir su respuesta geométricamente, porque quiere hacerlo de un modo distinto del egipcio. Da los siguientes pasos:



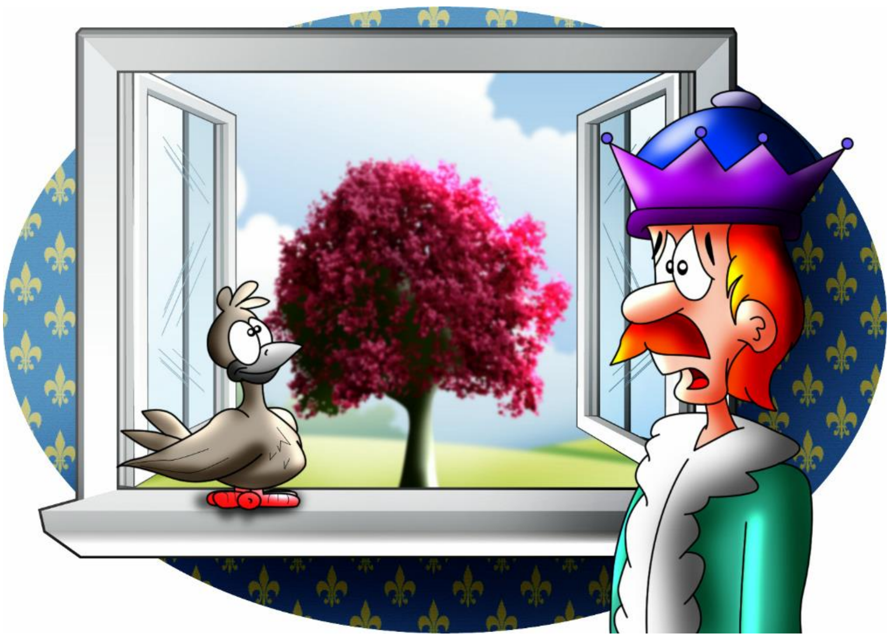
Anota la respuesta geométrica de René Descartes:

La división en extrema y media razón se construye con regla y compás al seguir los pasos indicados.

¡La fusión del Álgebra y la Geometría, realizada por René Descartes, resolvió el problema brillantemente!, ¿verdad?

—Estoy seguro que los sacerdotes egipcios razonaban sobre sus construcciones de manera geométrica —dijo Descartes—. ¡Pero yo prefiero hacerlo algebraicamente!

De este modo el método algebraico de los babilonios y la geometría de los egipcios se fusionaron en una nueva ciencia, llamada *Geometría Analítica*. Ella te ayudará a analizar tu problema algebraicamente, y luego realizar la construcción buscada geométricamente.
En la evolución de la Geometría se inició una nueva etapa.



12

El secreto del ciruelo

Hace muchos años hubo un rey que, para su esparcimiento, poseía un precioso jardín detrás de su palacio. Solía pasear por él todos los días, deleitándose con los trinos de los pájaros y el perfume de las flores. Pero cuando regresaba a la sala del trono, los problemas, propios de la gobernación de un reino, se abatían sobre él de nuevo.

Los años pasaban, pero los problemas no disminuían; por el contrario, aumentaban.

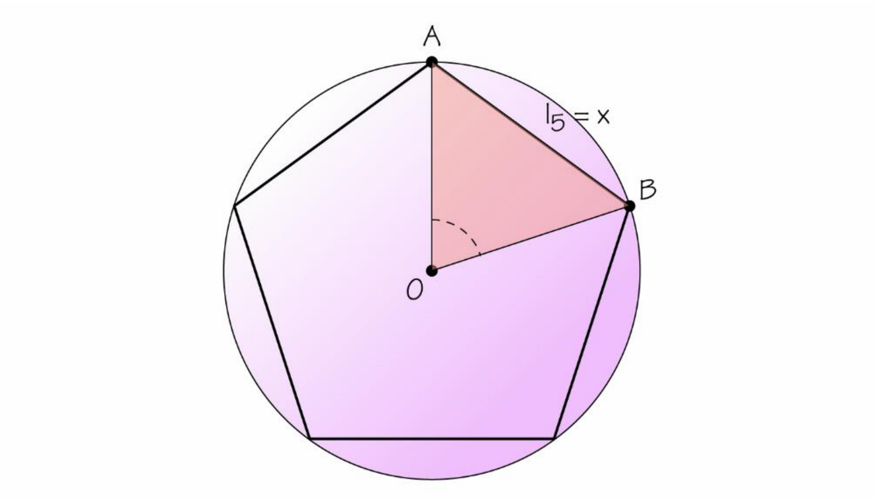
—Debe ser que algo estoy haciendo mal —se dijo el rey—. ¿Qué puede ser?

De pronto una tórtola se posó en la ventana y le dijo con voz humana:

—El ciruelo que hay en tu jardín te revelará el secreto. Pero debes cercarlo, para que nadie más coma sus frutos.

El rey quedó tan asombrado de que una tórtola pudiera hablar, que decidió fabricar una cerca pentagonal para el ciruelo personalmente. Trazó alrededor del árbol un círculo de 1 metro de radio, y se puso a pensar: ¿cómo inscribir en él un pentágono regular? ¡Ayúdale a averiguarlo, por favor!

¡Realiza el análisis algebraico del problema! Llama *x* a la longitud del lado del pentágono a construirse, medida en metros:



Sabes que el ángulo central de este polígono mide 72°, así que llama y a su coseno:

$y = Cos72°$

¡Descubre qué ecuación satisface la incógnita y!
Llama A al ángulo de 72 grados:

$72° = A$

Como $3A + 2A = 360°$, puedes estar seguro de:

$Cos(3 \cdot 72°) = Cos(2 \cdot 72°)$

¿Por qué? Porque:

$Cos(360° - a) = Cos360° \cdot Cosa + Sen360° \cdot Sena$

Es decir:

$Cos(360° - a) = -Cosa$

Por fórmulas de la trigonometría conoces que:

$Cos2A = 2Cos^2A - 1$
$Cos3A = 4Cos^3A - 3CosA$

Si igualas las dos expresiones, obtendrás:

$4Cos^3 72° - 3Cos72° = 2Cos^2 72° - 1$

Escríbelo en términos de y:

$4y^3 - 2y^2 - 3y + 1 = 0$

¡Se produjo una ecuación cúbica!
Pero, si la miras con atención, descubrirás que ésta posee una raíz entera 1. En efecto:

$$4 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = 0$$

Mas el número 1 no puede ser una solución al problema, puesto que en ese caso el ángulo central del pentágono mediría 90° y no 72°. ¿Qué hacer?
Usando el método de coeficientes indeterminados, puedes factorar la ecuación. Así:

$$(y-1)(4y^2+2y-1) = 0$$

Ahora lo sabes: el coseno del ángulo central del pentágono es la raíz de la ecuación cuadrática

$$4y^2 + 2y - 1 = 0$$

¡Encuentra su expresión algebraica!
Completando el cuadrado, hallarás que

$$\left(1y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

Es decir,

$$y = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

Ya conoces el valor del coseno de 72°:

$$Cos72° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

El triángulo OAB te informa que, por el teorema de los cosenos, se debe cumplir la siguiente igualdad:

$$1^2 + 1^2 - 2Cos72° = |\frac{2}{5} = x^2$$

Es decir:

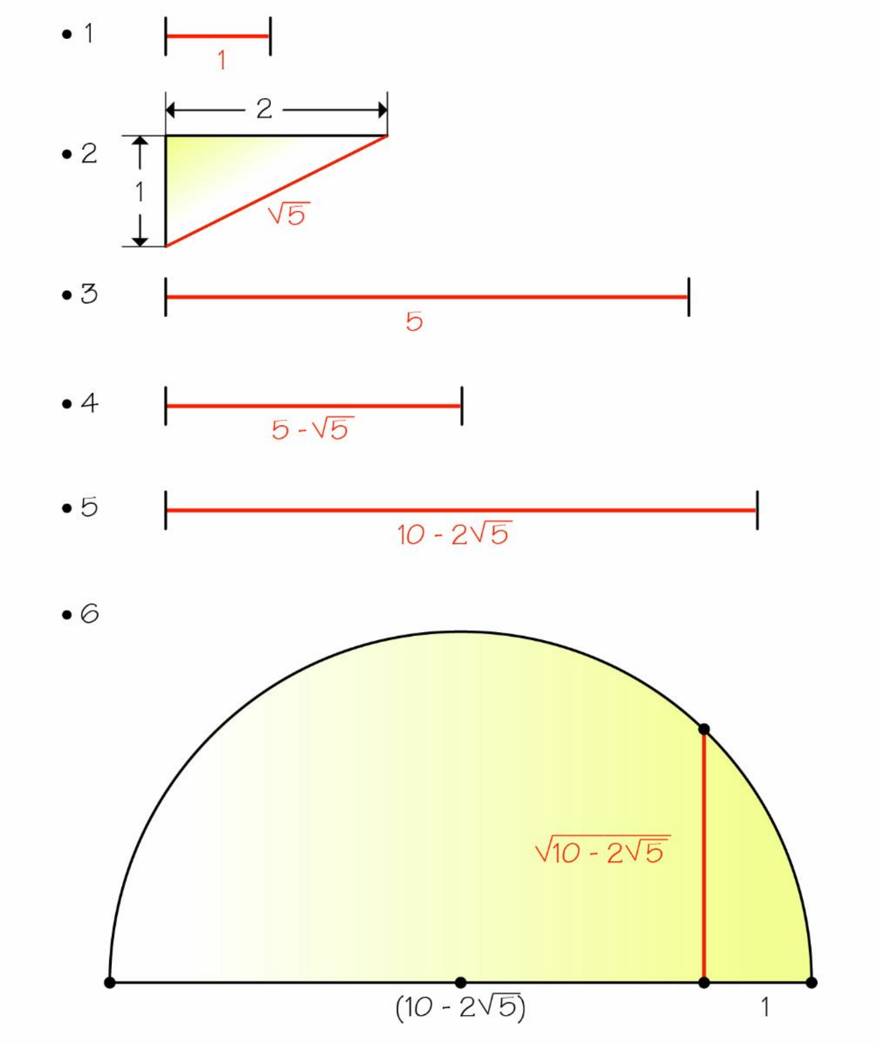
$$x = \sqrt{2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\, m$$

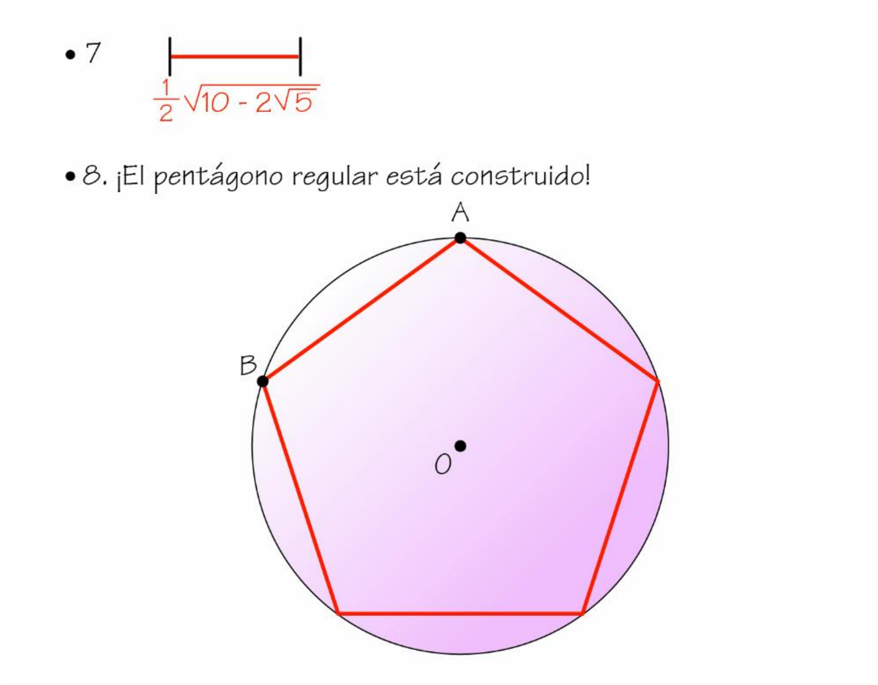
Anota tu respuesta algebraica:

> **Si se quiere inscribir un pentágono regular, dentro de una circunferencia de radio 1 metro, el lado de tal pentágono deberá medir $\frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ metros.**

¡El álgebra hizo su contribución exitosamente!

Estás listo para construir tu respuesta geométricamente. Para ello puedes dar los siguientes pasos:





(Para construir el pentágono en el paso 8, se duplicó la unidad de medida y la respuesta obtenida en el paso 7). Anota tu respuesta geométrica:

> **El lado del pentágono regular, inscrito dentro de una circunferencia, se puede construir con regla y compás si se siguen los pasos indicados.**

¡La regla, el compás y el método algebraico resolvieron el problema brillantemente!, ¿verdad?

El rey colocó la cerca alrededor del ciruelo y arrancaba y se comía cinco ciruelas diarias. Al comerse el último fruto, exclamó:

—¡Todas las ciruelas tienen un hueso! Y lo que observé en estos días es que la pulpa se come y el hueso no. ¡Y creo que ya entendí lo que ello significa!

Lo bueno de la vida es como la dulce pulpa de la ciruela, y se lo debe disfrutar y saborear. En cambio, los problemas de la vida son como el hueso, el cual no se come y, por lo tanto, no se los debe intentar resolver. ¡Simplemente se los debe tirar a la basura, igual que el hueso de la ciruela!

El rey dejó de preocuparse por los asuntos de la gobernación, y pronto descubrió que todo funcionaba perfectamente bien por sí mismo. De este modo el rey encontró, por fin, la paz. Y constató que es muy parecida a la que experimentamos en una mañana de mayo, cuando damos un paseo por un hermoso jardín.

13

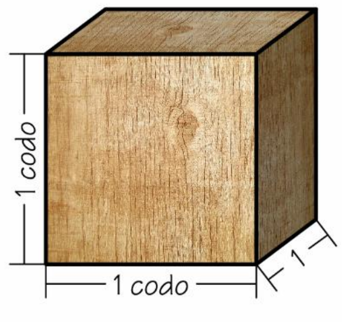
El enigma de Apolo

La isla de Delos era protegida por Apolo. Sin embargo, a veces sus habitantes se olvidaban de honrar a su Dios con un sacrificio y esto provocaba la ira divina.

En el año 360 a.C., una terrible peste invadió la isla. Se nombró una comitiva para consultar con el oráculo de Delfos, y la respuesta fue:

—¡Duplicad el altar de Apolo! ¡Además, la duplicación debe ser realizada con regla y compás!

La Pitonisa mostró el altar a la comitiva. Era un cubo, elaborado en madera de ciprés, cuyas aristas medían 1 codo:



La comitiva marchó apresuradamente a la Academia de Atenas, para rogar a Platón:

—Por Zeus, duplica el altar de Apolo: ¡de lo contrario pereceremos todos!

Platón reunió a filósofos y científicos, y todos, desesperados, empezaron a buscar la solución. Menecmo descubrió una, Eudoxo ofreció otra, Platón propuso una tercera. Sin embargo, todas las soluciones fracasaron por una misma razón: todas utilizaban parábolas o hipérbolas, que no eran construibles con regla y compás.

A los tres días los académicos exclamaron:

—¡Nos sentimos incapaces de duplicar el altar!

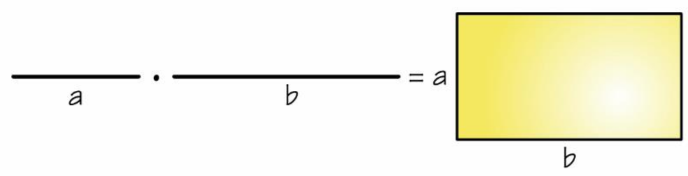
Ofrecieron vino e incienso a Apolo y la peste cesó.

El problema de duplicar el altar de Apolo quedó abierto. Y no fue resuelto, sino diecinueve siglos más tarde. En el año 1637, René Descartes exclamó, emocionado:

—¡La magnitud geométrica no tiene porqué ser construible solo con regla y compás, como lo creían Euclides y Platón! ¡Es raíz de una ecuación cúbica o de cuarto grado y, para construirla, también podemos usar una parábola fija!

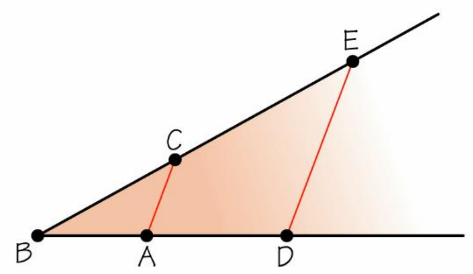
Para resolver el problema de Apolo, Descartes decidió usar el método algebraico de los babilonios. Llamó x a la longitud de la arista del nuevo altar. ¡Entonces, tan solo se debía resolver la ecuación cúbica $x^3 = 2$!

Pero ¿cómo representar el cubo de un segmento? Los griegos antiguos multiplicaban así:



¡El producto de dos segmentos era un rectángulo!

Para resolver el problema de Apolo, Descartes concibió una nueva forma de multiplicar. Trazó un ángulo arbitrario B y tomó el segmento AB como unidad. Para multiplicar $BD \cdot BC$, Descartes unió los puntos A y C, y luego trazó el segmento DE paralelo a AC. Entonces, afirmó Descartes, BE será el producto de BD y BC. ¿Por qué es así?



Por el Teorema de Tales, puedes escribir:

$$\frac{BC}{BA} \cdot \frac{BE}{BD}$$

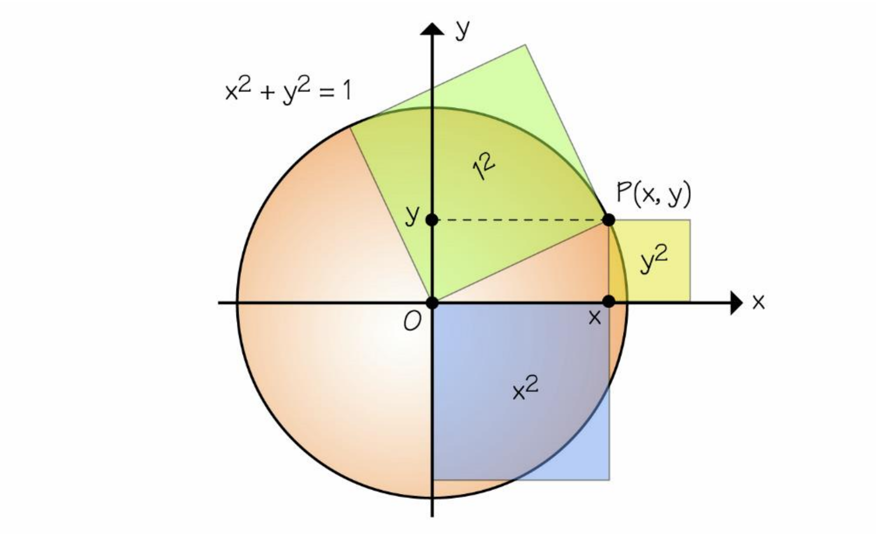
Multiplicando en cruz y recordando que $BA = 1$, obtienes la igualdad deseada:

$$BE = BD \cdot BC$$

Gracias a este artificio, Descartes pudo representar cualquier potencia de un segmento geométricamente. En particular, el cubo $x^3 = 2$, que es lo que necesitaba para resolver el problema de Apolo. Los geómetras griegos no tenían herramientas para resolver este problema, decía Descartes, porque solo podían representar geométricamente x^2, y no x^3. ¡Ahora esta limitación no existía más! Los geómetras griegos estaban limitados por la forma cúbica, tridimensional de x^3. ¡Para Descartes x^3 es un segmento! Y, en el problema de Apolo, tiene que ser igual a 2. ¿Cómo lograrlo?

Descartes considera una circunferencia de radio 1, y escoge en ella un punto P de coordenadas *x* e y. Recuerda la definición que había dado Apolonio a la sección cónica llamada circunferencia: es un lugar geométrico de los puntos que equidistan de un único punto llamado centro de la circunferencia. Entonces, gracias al Teorema de Pitágoras, Descartes puede escribir:

$x^2 + y^2 = 1^2$

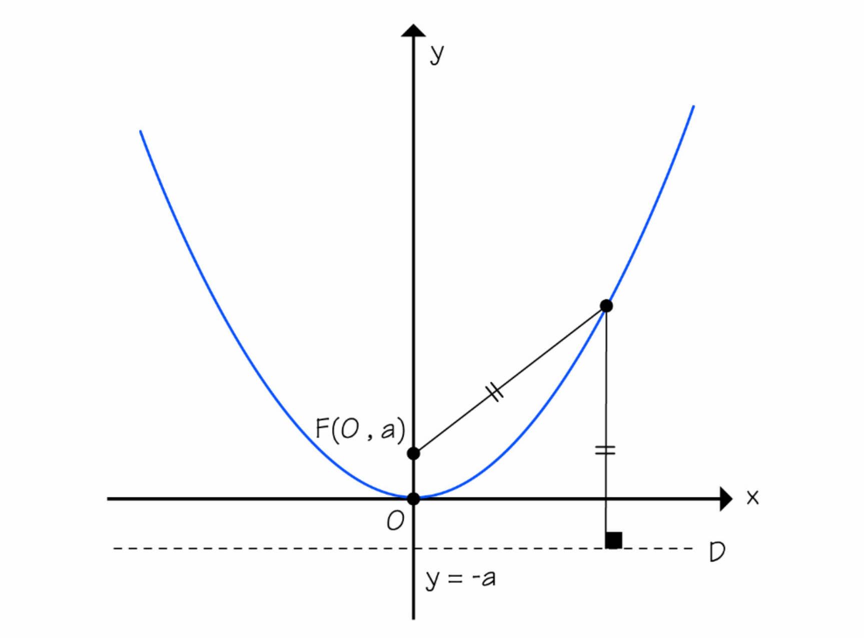


Como esta relación se cumple para cualquier punto *P* de coordenadas *x* e *y* de la circunferencia, Descartes descubre que la circunferencia tiene la siguiente ecuación:

$x^2 + y^2 = 1$

(Puesto que $1^2 = 1$ en la nueva concepción). ¡Por primera vez en la historia de la matemática la circunferencia fue dotada de una ecuación!

Descartes se sintió intrigado: ¿tal vez, la *parábola*, otra sección cónica, también posee una ecuación? Recuerda la definición que le da Apolonio: Es un lugar geométrico de los puntos que equidistan de un único punto llamado *foco* y una única recta llamada *directriz*.



Descartes llama (0, a) a las coordenadas del foco. Entonces, la distancia entre el eje *x* y la directriz tendrá que ser igual a a, pues el origen O debe equidistar del foco y de la directriz. Por lo tanto, la ecuación de la directriz será:

$$y = -a$$

O, lo que es lo mismo:

$$y + a = 0$$

Descartes escoge un punto arbitrario *P*(*x*,*y*) sobre la parábola, y escribe la condición de Apolonio:

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-a)^2} = y + a$$

Eleva ambos miembros al cuadrado:

$$x^2 + (y-a)^2 = (y+a)^2$$

Desarrolla los cuadrados de la diferencia y de la suma:

$$x^2 + y^2 - 2ay + a^2 = y^2 + 2ay + a^2$$

Simplifica la expresión:

$$x^2 = 4ay$$

Como esta relación se cumple para cualquier punto P de coordenadas *x* e y de la parábola, Descartes descubre que ésta tiene la siguiente ecuación:

$x^2 = 4ay$

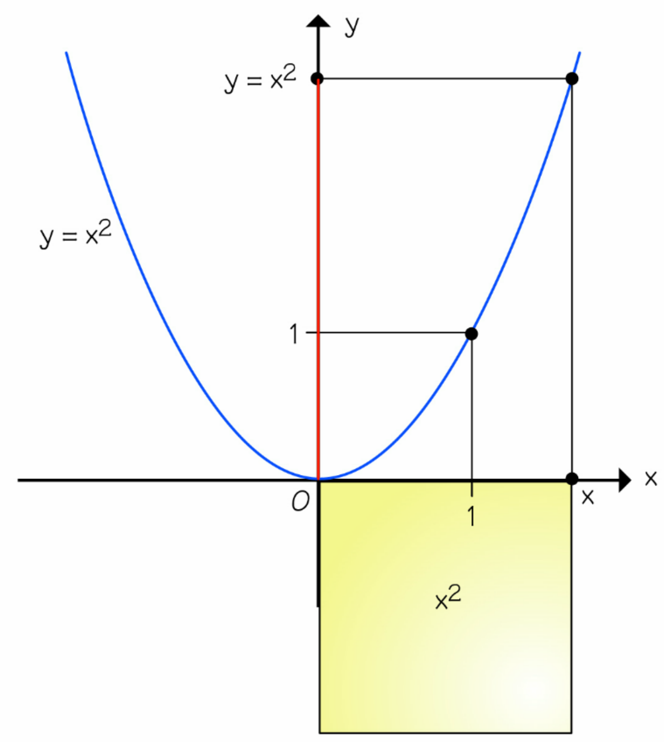
¡Por primera vez en la historia de la matemática la parábola fue dotada de una ecuación!
Descartes elige, como parábola fija, a aquella que posee el valor de a igual a un cuarto:

$x^2 = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot y = y$

Es decir, Descartes siempre usará, para la resolución de problemas geométricos, a la parábola:

$y = x^2$

¡Pero ahora x^2 no es un cuadrado geométrico, sino un segmento!, precisamente el segmento y. Al utilizar esta ecuación, Descartes puede trazar a esta parábola en el plano *xOy* (como no es posible hacerlo con regla y compás, Descartes inventa unos mecanismos articulados con este propósito). Realiza la multiplicación punto a punto, es decir, para cada segmento *x*, obtiene el segmento correspondiente x^2. A este segmento x^2 Descartes lo representa en el eje vertical como y.



Volviendo al problema de Apolo, Descartes llama *x* a la longitud de la arista del nuevo altar. Entonces, debe resolver la ecuación cúbica

$x^3 = 2$

Esta ecuación, dice el geómetra francés, se resolverá intersecando la parábola fija con un círculo. ¿Cuál es ese círculo?

Para encontrarlo, Descartes escribe la ecuación algebraica a resolverse:

$$x^3 - 2 = 0$$

Multiplica por *x* ambas partes de ella:

$$x^4 - 2x = 0$$

Resta y suma el término x^2:

$$x^4 - x^2 + x^2 - 2x = 0$$

Llama y a x^2 (es aquí donde aparece la parábola fija), obteniendo:

$$(y^2 - y) + (x^2 - 2x) = 0$$

Completa los cuadrados, de lo cual resulta:

$$(x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

¡Y ésta es la ecuación del círculo buscado! Su centro se halla en el punto $1, \frac{1}{2}$, y su radio mide $\sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ unidades. ¡La arista del altar de Apolo es la intersección de este círculo con la parábola $y = x^2$!

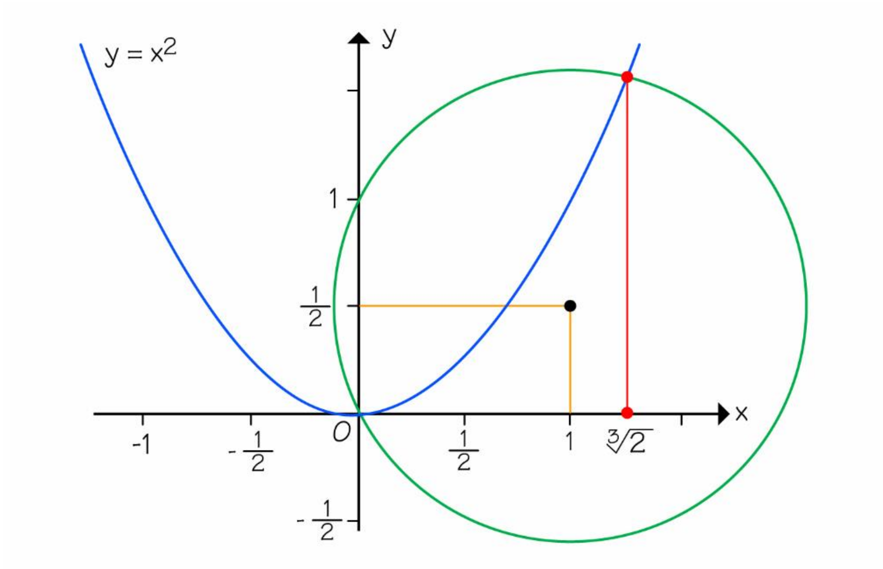
Descartes dibuja, en un sistema de coordenadas, la parábola:

$$y = x^2$$

Y el círculo:

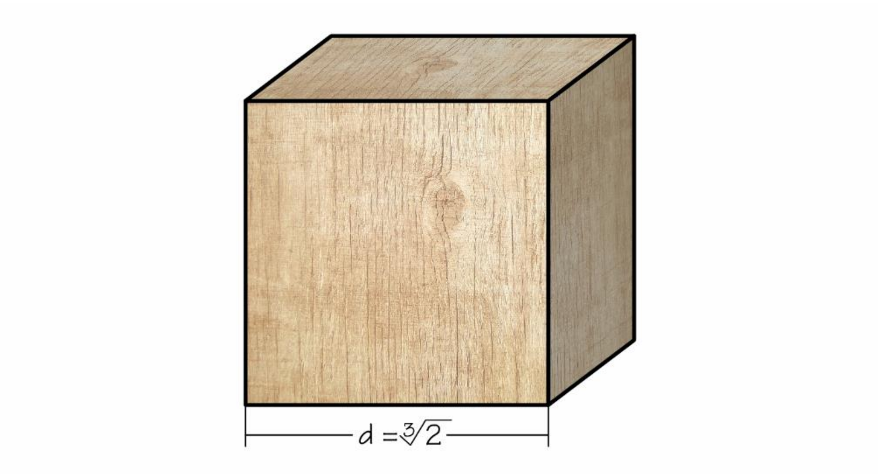
$$(x-1)^2 + \left(y - \tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{5}{4}$$

¿Cuál es la coordenada *x* de la intersección de las dos curvas? Por supuesto: ¡es la magnitud $\sqrt[3]{2}$! René Descartes se siente orgulloso de haber resuelto el problema de la duplicación del altar de Apolo, ante el cual habían sucumbido los esfuerzos de los mejores científicos griegos.



¡Anota la respuesta de René Descartes!

El altar duplicado, requerido por Apolo, es el siguiente:



Aunque no es posible construir la magnitud $\sqrt[3]{2}$ con regla y compás, sí es posible construirla como la intersección de la parábola fija con un círculo. De este modo se resolvió el problema de Apolo y nació la Geometría Analítica. ¡La era del número algebraico se había iniciado!

14

La alfombra mágica

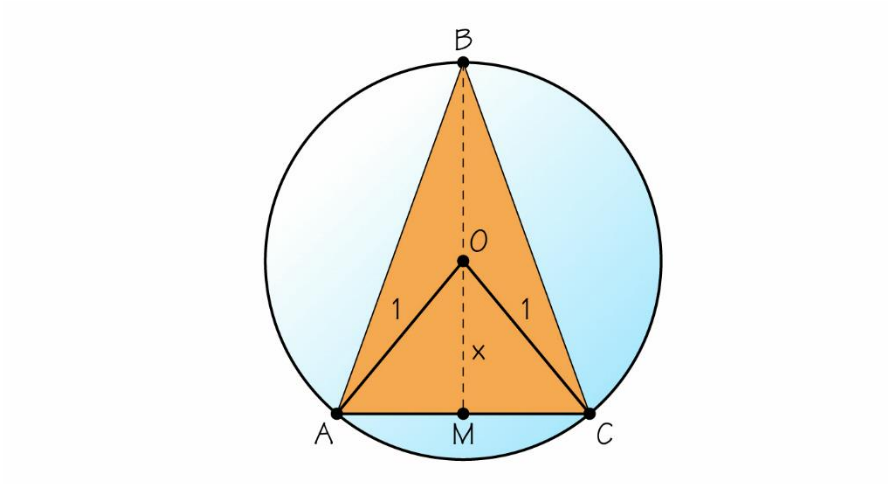
—Todos dicen que Dios existe, pero yo no puedo verlo —se quejó un visitante ante un santo—. ¡Debo tener una venda que tapa mis ojos! ¿Podría usted quitármela?

—¡Con gusto! —dijo el santo—. Será sencillo: haga usted tejer una alfombra redonda de 2 varas[5] de diámetro, con un triángulo isósceles inscrito en ella. El triángulo debe abarcar 1 vara cuadrada, ni más ni menos. ¡Procure usted ser preciso en ello! Una vez fabricada la alfombra, siéntese sobre ella y observe el sol. Luego cierre los ojos y ábralos de nuevo; haga así tres veces. ¡Le aseguro que la venda se le caerá de los ojos y podrá ver a Dios!

El hombre se puso a pensar: ¿cómo trazar el triángulo pedido? ¡Ayúdale a averiguarlo, por favor!

Imagina que la alfombra ya ha sido tejida y el triángulo isósceles ABC ha sido inscrito dentro de ella. Llama *x* al segmento OM.

[5] Una vara mide 83.6 cm.



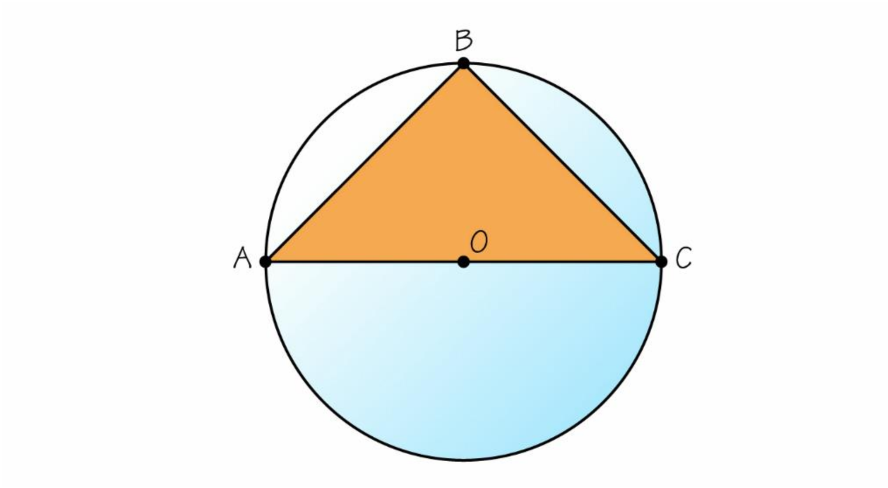
Entonces, el área del triángulo ABC puede ser calculada de este modo:

$$A_{\Delta ABC} = AM \cdot BM = \sqrt{1-x^2}(1+x) = 1$$

Al elevar al cuadrado, obtendrás esta ecuación de cuarto grado:

$$x^4 + 2x^3 - 2x = 0$$

Como puedes ver, $x = 0$ es una raíz. Es decir, el triángulo ABC puede ser este:



¡Pero parece que también existe otra alternativa!
Para encontrarla, divide tu ecuación para x. Obtendrás la siguiente ecuación cúbica:

$$x^3 + 2x^2 - 2x = 0$$

¡Resuélvela por el método de Descartes!
Para encontrar la ecuación del círculo, multiplica por x ambas partes de la ecuación. Obtendrás:

$$x^4 + 2x^3 - 2x = 0$$

Elimina el término cúbico con la sustitución

$$x = x' - \frac{1}{2}$$

Se producirá:

$$x'^4 - \frac{3}{2}x'^2 - x' = -\frac{13}{16}$$

Resta y suma el término x^2:

$$x'^4 - \frac{5}{2}x'^2 + x'^2 - x' = -\frac{13}{16}$$

Llama y' a x'^2 (para introducir la parábola fija), y se obtiene:

$$(y'^2 - \frac{5}{2}y') + (x'^2 - x') = -\frac{13}{16}$$

Al completar los cuadrados, te resulta:

$$\left(x' - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y' - \frac{5}{4}\right)^2 = 1$$

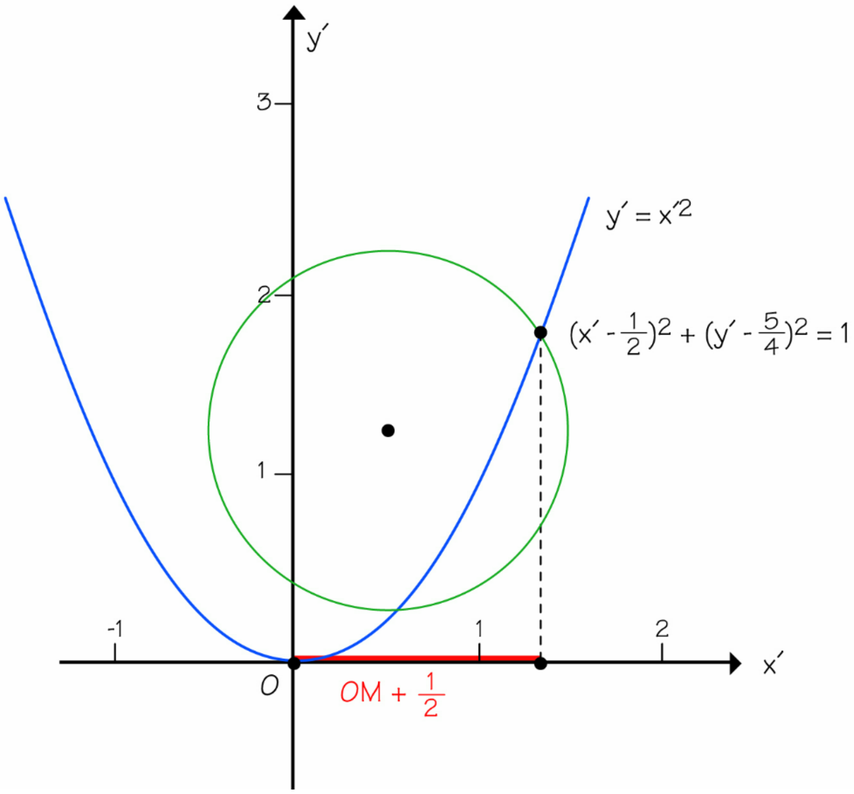
¡Esta es la ecuación del círculo buscado! Su centro se halla en el punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$, y su radio mide 1 unidad.

Dibuja, en un sistema de coordenadas, la parábola:

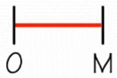
$$y' = x'^2$$

Y, el círculo:

$$\left(x' - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y' - \frac{5}{4}\right)^2 = 1$$

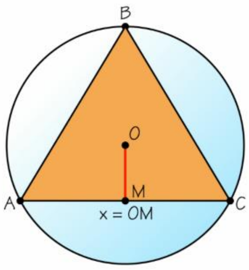


¿Cuál es la coordenada *x'* de la intersección derecha de las dos curvas? Por supuesto: ¡el segmento buscado OM, disminuido en media unidad! (La intersección izquierda, con seguridad, es la media unidad; pues, al disminuirla en media unidad, debe producirse 0, que es la raíz que se añadió por multiplicar la ecuación por *x*). Regresa a la coordenada *x*, restando $\frac{1}{2}$ a la coordenada *x'* de la intersección derecha de las dos curvas:



Anota tu respuesta:

> **El segmento buscado OM acaba de ser construido con regla, compás y parábola fija.**



(Para construir el triángulo, se duplicó la unidad de medida y la respuesta obtenida). ¡El método de Descartes resolvió el problema brillantemente!, ¿verdad?

El hombre hizo tejer la alfombra, se sentaba sobre ella cada mañana y observaba el sol. Luego cerraba los ojos y al abrirlos de nuevo, le parecía que el sol acababa de salir.

—¡Pero no es así! —se dijo a sí mismo—. ¡El sol siempre está allí, incluso cuando yo cierro los ojos!

—Y lo mismo sucede con su Ser —le dijo el santo—. ¡El Ser siempre está con usted, incluso cuando usted no lo ve!

El Ser no puede estar ausente ni por un solo momento. Si Él estuviera ausente, el mundo se desplomaría al instante.

15

El pájaro de oro

En tiempos remotos, vivía en Rusia un zar cuyo palacio estaba rodeado de un precioso jardín. En él crecía el árbol que daba manzanas de oro. Cuando las manzanas maduraron, fueron contadas; pero a la mañana siguiente ya faltaba una. Se lo comunicaron al zar, que ordenó que todas las noches se montara guardia bajo el árbol.

El zar tenía un hijo y, al oscurecer, lo envió de centinela al jardín. El joven se tumbó bajo un árbol, vigilante, y no se dejó dominar por el sueño. Cuando dieron las doce, oyó un ruido en el aire y, a la luz de la luna, vio acercarse un pájaro cuyo plumaje brillaba como el oro.

El pájaro se posó en el árbol y, cuando acababa de picotear una manzana, el joven le disparó una flecha. El pájaro huyó, pero la flecha le había dado en el plumaje y se le cayó una pluma de oro. El joven la cogió; a la mañana siguiente, se la llevó al zar y le contó todo lo que había visto por la noche.

El zar llamó a sus consejeros, y le aclararon que una pluma como aquélla valía más que todo el reino.

—Si la pluma es tan valiosa —dijo el zar—, una sola no me sirve de nada, sino que debo y quiero tener todo el pájaro. ¡Debo poseer esa maravilla en mi palacio!

El consejero más viejo le dijo:

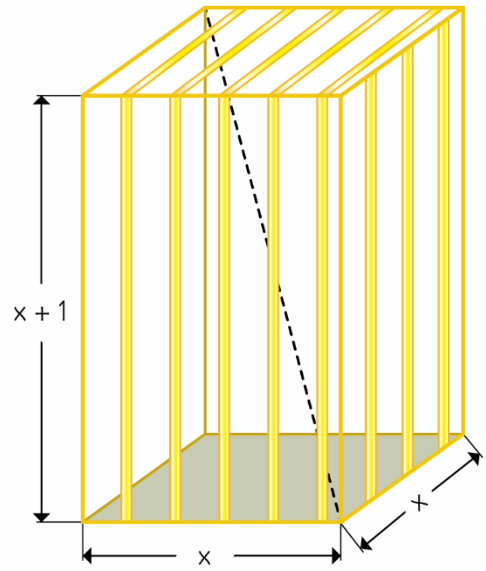
—¡Majestad! El pájaro de oro no puede ser atrapado ni con las manos, ni con la escopeta. Pero él mismo vendrá a vuestro palacio si se construye para él una jaula de oro de medidas especiales.

—¿De qué medidas debe ser la jaula de oro? —preguntó el zar.

—Su base tiene que tener la forma de un cuadrado, —contestó el consejero,— y su altura debe superar el lado de la base en 1 arshín[6]. Además, la superficie de la base deberá exceder a la diagonal de la jaula en 3 arshín. Así lo dicen los libros antiguos.

De inmediato, el zar encargó al orfebre la fabricación de tal jaula de oro. Al escuchar las especificaciones, el orfebre tuvo que ponerse a pensar: ¿qué medidas poseerá su obra de arte? ¡Ayúdale a averiguarlo, por favor!

¡Realiza el análisis algebraico del problema! Llama x a la longitud de la arista de la base:



Entonces, su altura medirá $(x + 1)$ arshín. Escribe la condición que debe cumplir la jaula de oro:

$$x^2 - 3 = \sqrt{(x + 1)^2 2x^2}$$

Obtuviste una ecuación algebraica. ¡Averigua de qué grado es!
Para ello eleva al cuadrado ambas partes de la ecuación:

$$(x^2 - 3)^2 = \left(\sqrt{(x + 1)^2 2x^2}\right)^2$$

Ejecuta las operaciones:

$$x^4 - 6x^2 + 9 = 3x^2 + 2x + 1$$

Finalmente, obtendrás:

$$x^4 - 9x^2 - 2x + 8 = 0$$

[6] Un arshín, una antigua unidad de medida rusa, equivalía a 71.12 cm.

¡Es una ecuación de cuarto grado! ¡Usa el método de Descartes para descubrir su raíz positiva intersecando la parábola fija con un círculo!
Para encontrar la ecuación del círculo, resta y suma el término x^2:

$$x^4 - 9x^2 + x^2 - x^2 - 2x + 8 = 0$$

Agrupa los términos:

$$(x^4 - 10x^2) + (x^2 - 2x) = -8$$

Introduce a la parábola fija, asignando y a x^2:

$$(y^2 - 10y) + (x^2 - 2x) = -8$$

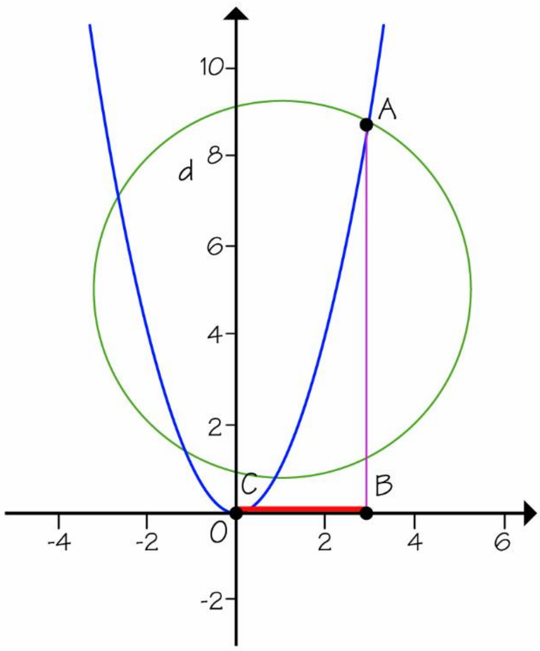
Completa los cuadrados y reordena los términos:

$$(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 18$$

¡Esta es la ecuación de la circunferencia buscada! Anota tu respuesta algebraica:

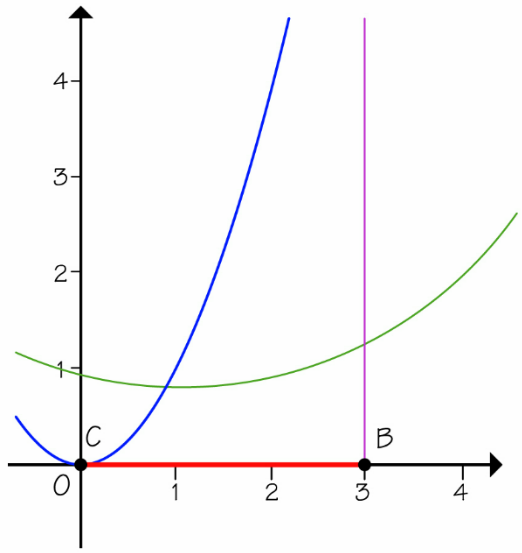
> **El lado de la base de la jaula de oro puede ser construida como la intersección de la parábola fija $y = x^2$ con la circunferencia de centro en $(1; 5)$ y radio $r = \sqrt{18}$.**

¡El álgebra hizo su contribución exitosamente!
Estás listo para construir tu respuesta geométricamente. Para ello construye la parábola y la circunferencia en un plano cartesiano:

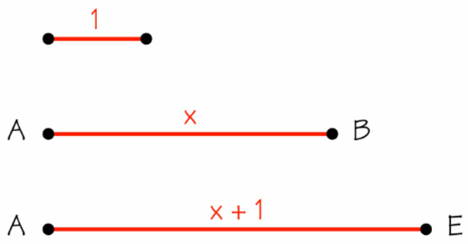


Fíjate que existen cuatro puntos de intersección entre la parábola y el círculo; es decir, hay cuatro soluciones reales. Sin embargo, dos de ellas son negativas y, por tanto, no pueden designar una longitud geométrica. De las dos raíces positivas elige la más grande, la que se encuentra en el punto A.

Amplía la visión de la zona que te interesa:

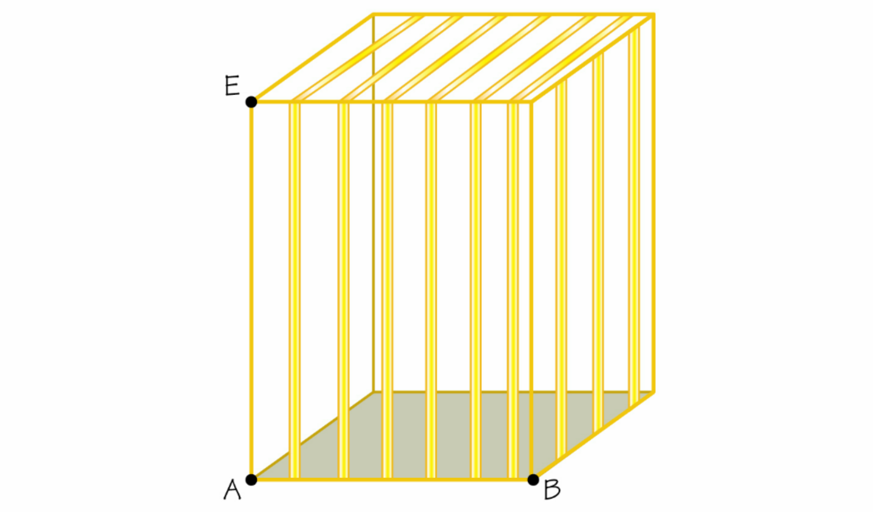


Has descubierto las aristas de la jaula de oro:



Anota tu respuesta geométrica:

Las dimensiones de la jaula de oro acaban de ser construidas con regla, compás y parábola fija.



¡La regla, el compás y el método algebraico resolvieron el problema genialmente!, ¿verdad?

Cuando la jaula estaba lista, el pájaro de oro llegó al palacio. Miró la jaula de oro y dijo al zar:

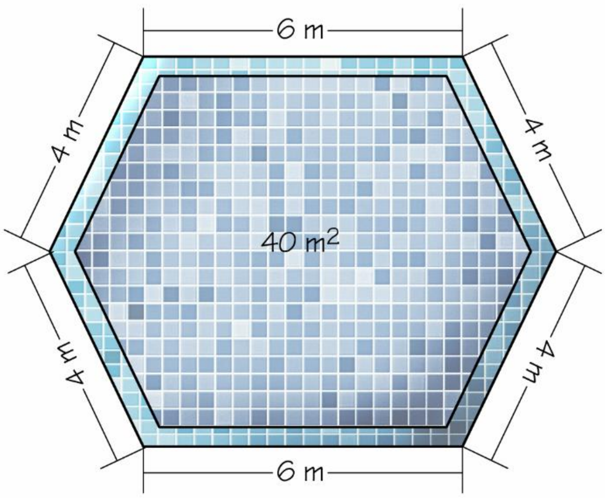
—¡Ningún pájaro podría resistirse a vivir en una jaula así, ni siquiera el pájaro de oro! Sin embargo, si me dejas libre obtendrás un bien mucho mayor: te prometo que jamás tu reino sufrirá hambre ni guerras. ¿Qué escoges?

El zar meditó en el asunto y comprendió que la oferta del pájaro era más valiosa que todo el oro del mundo. La aceptó agradecido y desde entonces todos en su reino vivieron felices para siempre.

16

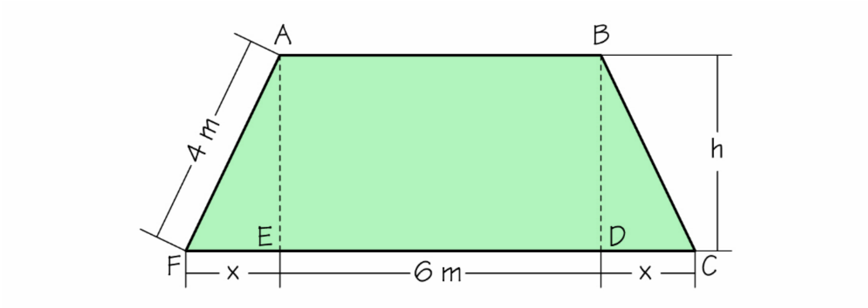
Llegó tarde

Un hombre de Sumen necesitaba cavar en su patio una piscina en forma hexagonal. Decidió que sería simétrica, sus lados opuestos paralelos, de 4, 6 y 4 metros, respectivamente, y que su área abarcaría 40 metros cuadrados.



En este momento, el hombre se está preguntando: ¿de qué longitud debe él trazar el diámetro de la piscina? ¡Ayúdale a averiguarlo, por favor!

Como la piscina será simétrica, es suficiente que consideres únicamente la mitad superior de ella, es decir, el trapecio ABCF:



Si llamas x al segmento DC, y h a la altura del trapecio, lo que conoces es lo siguiente:

$AF = BC = 3m$
$AB = 6m$
$FC = (6 + 2x)m$

Tu objetivo es encontrar el valor de la incógnita x que hace igual a 40 el área de la piscina.
¡Aplica el Teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo *BDC*! Descubrirás que

$h^2 + x^2 = 4^2$

Por lo tanto, la altura h puede ser expresada de este modo:

$h = \sqrt{16 - x^2}$ (1)

¿Recuerdas cómo se expresa el área de un trapecio? Es igual al producto de la semisuma de sus bases por su altura:

$A_{ABCF} = \frac{AB+FC}{2} \cdot h$

En otras palabras:

$A_{ABCF} = \frac{6+(6+2x)}{2} \cdot h$

Simplifica la expresión:

$A_{ABCF} = (6 + x) \cdot h$ (2)

Al sustituir la expresión (1) en la igualdad (2), se produce:

$A(x) = (x + 6)\sqrt{16 - x^2}$ (3)

Y, como la quieres igual a 20, puedes escribir:

$(x + 6)\sqrt{16 - x^2} = 20$

Al elevar al cuadrado, obtendrás la siguiente ecuación de cuarto grado:

$$x^4 + 12x^3 + 20x^2 - 19\,2x - 176 = 0$$

Por el método de Descartes descubrirás la raíz positiva de esta ecuación intersecando la parábola fija con un círculo; pero antes tienes que eliminar el término cúbico.
Para ello realiza el siguiente cambio de variable:

$$x = x' - 3$$

Entonces, la nueva ecuación tomará esta forma:

$$x'^4 - 34x'^2 - 96x' + 337 = 0$$

¡Ahora puedes usar el método de Descartes para descubrir la raíz positiva de esta ecuación!
Para encontrar la ecuación del círculo, resta y suma el término x'^2:

$$(x'^4 - 35x'^2) + (x'^2 - 96x') + 337 = 0$$

Llama *y'* a x'^2 (para introducir la parábola fija); obtendrás:

$$(y'^2 - 35y) + (x'^2 - 96x') + 337 = 0$$

Al completar los cuadrados, te resultará:

$$(x - 48)^2 + (y' - 17.5)^2 + 337 = 48^2 + 17.5^2$$

Es decir,

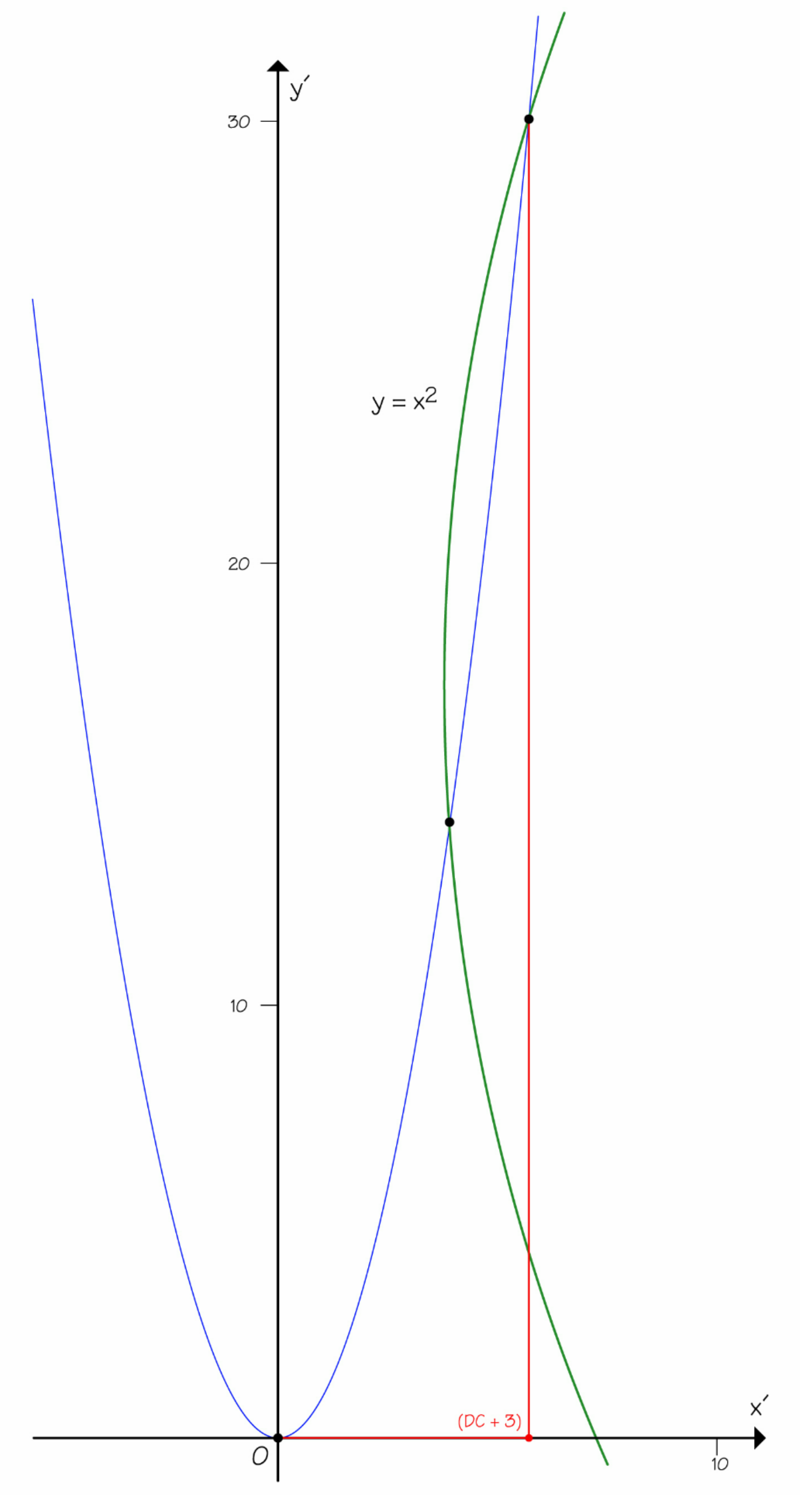
$$(x' - 48)^2 + (y' - 17.5)^2 + 337 = 2273.25$$

¡Esta es la ecuación del círculo buscado! Su centro se halla en el punto (48,17.5), y su radio mide $\sqrt{2273.25} \simeq 47.6786$ unidades.
Dibuja, en un sistema de coordenadas, la parábola:

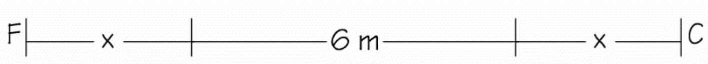
$$y' = x'^2$$

Y, el círculo:

$$(x' - 48)^2 + (y' - 17.5)^2 = 2273.25$$

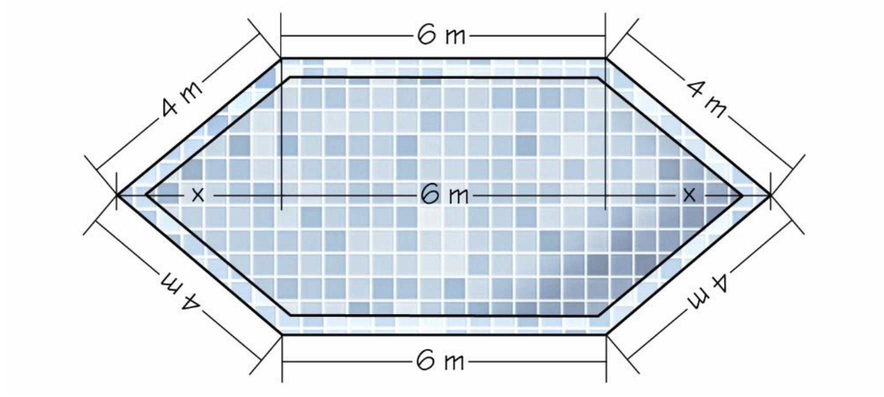


Como puedes ver, hay dos intersecciones de las dos curvas. Pero, como $x = x' - 3$, la abscisa pequeña no te sirve, pues es menor a 3. Entonces, escoge la abscisa grande y, restándole 3, obtendrás el segmento DC, cuyo doble hay que añadir a los 6 metros para obtener el diámetro de la piscina:



Anota tu respuesta:

El segmento buscado DC acaba de ser construido con regla, compás y la parábola fija.



¡El método de Descartes resolvió el problema brillantemente!, ¿verdad?

El hombre era un poco vago, así que decidió usar la astucia. Llamó a un gitano y le dijo:

—Según una carta del sultán de Constantinopla, en mi patio está enterrado un tesoro. Si cavas a un metro de profundidad, dividiremos el tesoro en partes iguales.

—¡No le creas, amo, al sultán de Constantinopla! —exclamó el gitano—. Él escribió una carta igual a la tuya a un hombre de Lom. ¡Le cavé un pozo entero, pero no encontré nada!

17

La Estrella de David

Un rabí odiaba la Matemática.

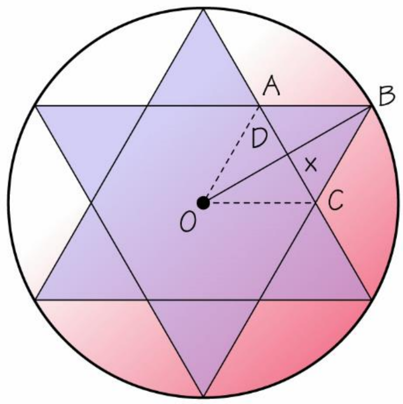
—¿Para qué sirven la Geometría y el Álgebra? —decía— ¡Lo único importante es amar a Dios! No se puede amar a Dios y a la Matemática a la vez.

Una noche Dios apareció en sus sueños y le dijo:

—Quiero una estrella de David en el vitral de la entrada de tu sinagoga. Y me gustaría que ocupe un espacio de un metro cuadrado, para que todos puedan recordar que hay un solo Dios.

El rabí salió al patio de la sinagoga y se puso a pensar: ¿de qué radio debe trazar la circunferencia, para que la estrella de David ocupe exactamente 1 metro cuadrado? ¡Ayúdale a averiguarlo, por favor!

¡Realiza el análisis algebraico del problema! Llama x a la longitud del radio de la circunferencia buscada, medida en metros. Con la misma apertura del radio, divide a la circunferencia en seis partes. Al unir estos puntos, obtendrás la estrella de seis puntas. ¡Es la estrella de David!



Para expresar su área en términos de x, observa que en cada punta se formaron triángulos equiláteros congruentes (¿puedes ver por qué?). Une el centro de la circunferencia con los vértices de estos triángulos: se forman rombos congruentes. La diagonal mayor de estos rombos es igual al radio de la circunferencia, mientras que la diagonal menor es igual al lado de cualquiera de los triángulos equiláteros.

Si aplicas el Teorema de Pitágoras, en el ΔABD hallarás que:

$AB^2 = AD^2 + BD^2$

Como $BD = \frac{x}{2}$ y ΔABC es equilátero, puedes afirmar que: $AB = AC$.
Así que:

$AC^2 = \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2$

Al elevar al cuadrado, obtienes:

$$AC^2 = \frac{AC^2}{4} + \frac{x^2}{4}$$

Si multiplicas por 4 ambos miembros y despejas el valor de AC^2, sabrás que:

$AC^2 = \frac{x^2}{3}$

Si extraes la raíz cuadrada de ambos miembros, te resultará:

$AC = \frac{x}{\sqrt{3}}$

Al realizar 6 réplicas del rombo *OABC*, obtienes nada más y nada menos que toda la estrella de seis puntas. Por lo tanto, $A_{estrella} = 6A_{rombo}$.

A su vez, cada rombo se forma con dos triángulos equiláteros unidos por sus bases. Por lo tanto, $A_{estrella} = 6 \cdot 2 \cdot A_{\Delta ABC}$.

Es decir:

$$A_{estrella} = 12A_{\Delta ABC}$$

Aplica la fórmula del área de un triángulo:

$$A_{estrella} = 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot Sen60°$$

Reemplaza los valores:

$$A_{estrella} = 6 \cdot \frac{x}{\sqrt{3}} \cdot \frac{x}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Realiza las operaciones:

$$A_{estrella} = \sqrt{3}x^2$$

Recuerda que la estrella debe abarcar 1 metro cuadrado:

$$\sqrt{3}x^2 = 1$$

Despejando x^2, obtienes:

$$x^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Si extraes la raíz cuadrada de ambos miembros, conocerás la expresión algebraica para la incógnita:

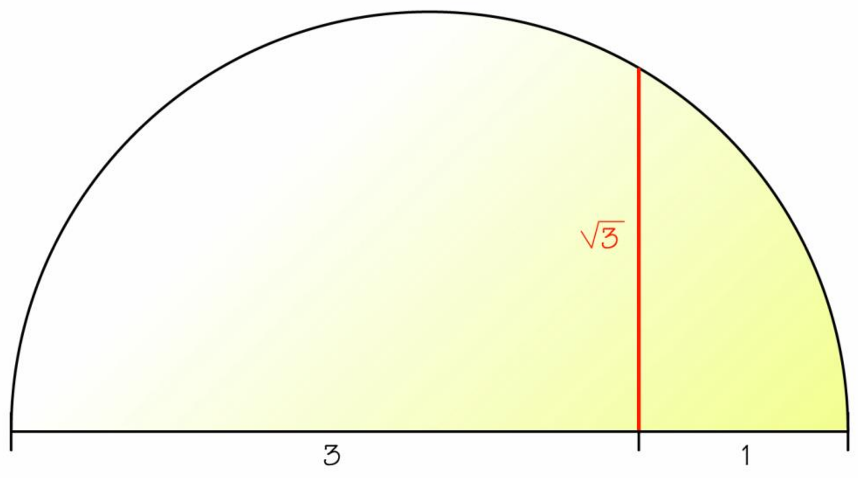
$$x = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3}}m$$

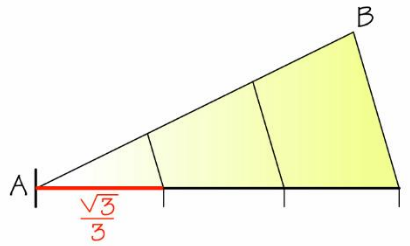
Anota tu respuesta algebraica:

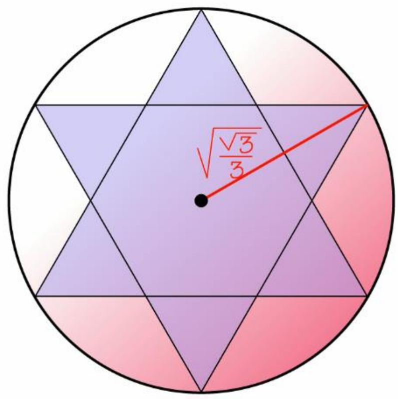
Para construir una Estrella de David de 1 metro cuadrado de superficie, se requiere que ésta sea inscrita dentro de una circunferencia de radio $\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3}}$ metros.

¡El álgebra hizo su contribución exitosamente!

Estás listo para construir tu respuesta geométricamente. Como únicamente están involucradas raíces cuadradas, la realizarás con regla y compás. Para ello puedes dar los siguientes pasos:


$\sqrt{3}$
3
1


B
A
$\frac{\sqrt{3}}{3}$


$\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3}}$

Anota tu respuesta geométrica:

> **Se acaba de construir, con regla y compás, el radio de la circunferencia que contiene a la estrella de David de área igual a 1 metro cuadrado.**

¡La regla, el compás y el método algebraico resolvieron el problema genialmente!, ¿verdad?

Al llegar al final de la construcción, el rabí quedó enamorado de la Matemática.

—¡Dios está en todas partes y también en la Geometría y el Álgebra! —dijo a los amigos—. Y creo que, si amas profundamente a la Matemática, descubrirás a Dios.

Las actividades humanas son caminos hacia Dios.

18

Los Diez Mandamientos

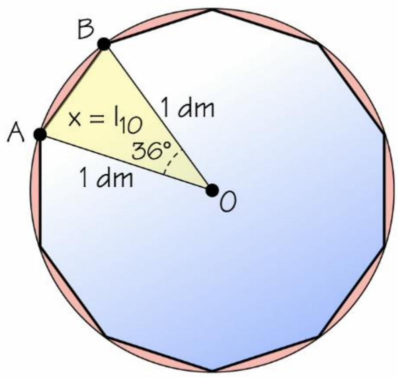
Para alcanzar la pureza moral, un hombre decidió cumplir los Diez Mandamientos al pie de la letra.

—Para facilitarme la tarea —se dijo—, anotaré cada uno de ellos en los vértices de un decágono.

Sobre una hoja de papel trazó un círculo de radio 1 decímetro y se puso a pensar: ¿cómo inscribir dentro de él un decágono regular con regla y compás?

¡Ayúdale en esta difícil tarea, por favor!

¡Realiza el análisis algebraico del problema! Llama *x* a la longitud del lado del decágono a construirse, medida en decímetros:



Sabes que el ángulo central de este decágono mide 36°, así que llama *y* a su coseno: $y = Cos36°$.

¡Descubre qué ecuación satisface la incógnita y! En la unidad 4, descubriste el valor del coseno de 72 grados:

$$Cos72° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

Como esta vez se trata del ángulo mitad, usa la fórmula trigonométrica

$$Cos2a = 2Cos^2a - 1$$

Obtendrás:

$$Cos72° = 2Cos^2 36° - 1$$

Es decir,

$$2Cos^2 36 - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

Al realizar las operaciones, se producirá:

$$Cos36° = \frac{1}{4}\sqrt{2\sqrt{5}+6}$$

El triángulo *OAB* te informa que, por el teorema de los cosenos, se debe cumplir la siguiente igualdad:

$$1^2 + 1^2 - 2Cos36° = |_{10}^{2} = x^2$$

Es decir:

$$x = \sqrt{2 - \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{5}+6}} = \sqrt{2 - \frac{1}{2}\sqrt{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}} =$$

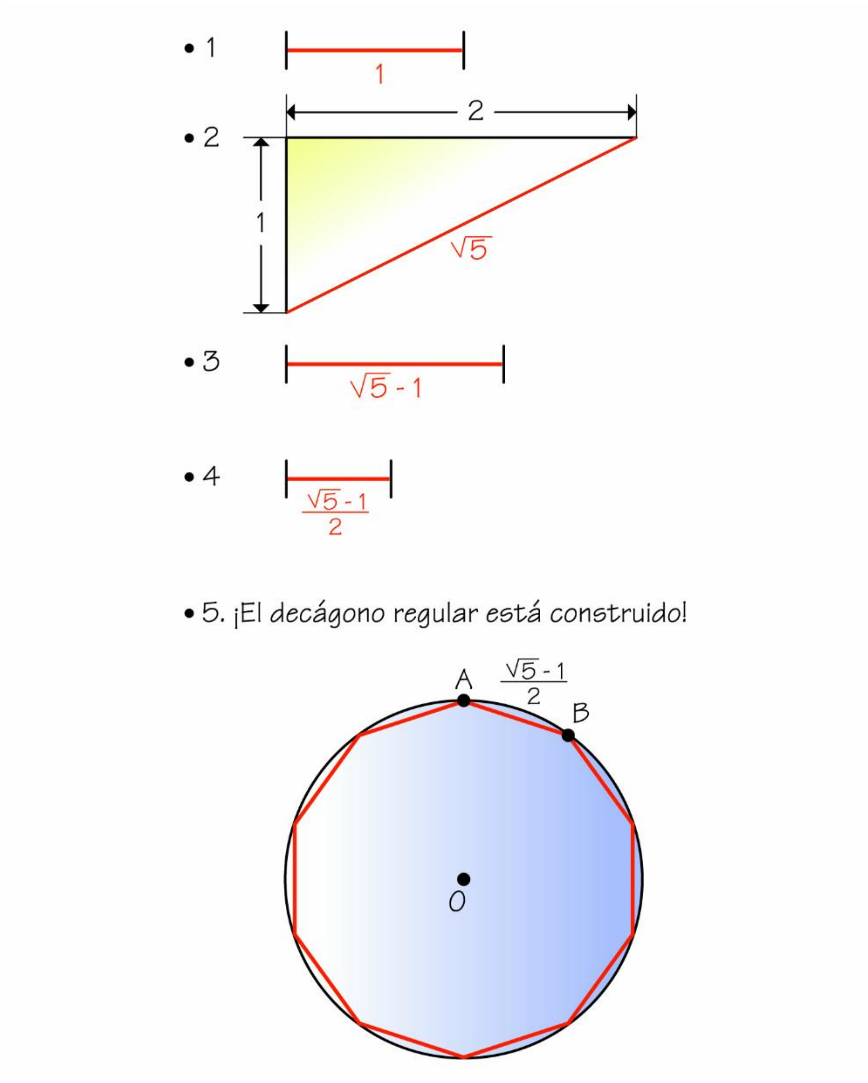
$$\sqrt{2 - \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{6-2\sqrt{5}} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)dm$$

Anota tu respuesta algebraica:

> **Si se quiere inscribir un decágono regular dentro de una circunferencia de radio 1 dm, el lado de tal decágono deberá medir $\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$ dm.**

¡El álgebra hizo su contribución exitosamente!

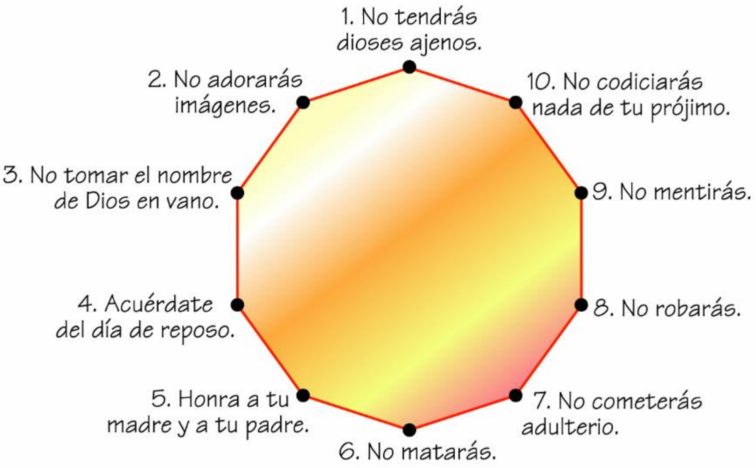
Estás listo para construir tu respuesta geométricamente. Para ello puedes dar los siguientes pasos:



Anota tu respuesta geométrica:

> **El lado del decágono regular, inscrito dentro de una circunferencia, se puede construir con regla y compás al seguir los pasos que se acaban de indicar.**

¡He aquí el decágono de los diez mandamientos!



¡La regla, el compás y el método algebraico resolvieron el problema genialmente!, ¿verdad?

Al anotar los diez mandamientos, el hombre se dio cuenta de algo.

—Con el conocimiento geométrico —se dijo—, me estoy robando mi *ignorancia*, estoy cometiendo adulterio respecto de mi *ignorancia*, estoy matando a mi *ignorancia*. ¡Ya no necesito ni robar, ni cometer adulterio, ni matar a las personas!, pues estoy haciendo todo esto con mi propia ignorancia.

¡La Matemática nos ayuda a cumplir los Diez Mandamientos!

19

Los diez necios

Un hombre quedó muy impresionado al escuchar la fábula hindú *Los diez necios*. La fábula decía así:

> *Los diez necios vadearon un río y, al llegar a la otra orilla, quisieron asegurarse de que realmente todos habían atravesado sanos y salvos la corriente. Uno de los diez necios empezó a contar, pero solo contó a los otros y se dejó fuera a sí mismo.*
>
> *—No veo más que nueve —dijo—. Seguramente, hemos perdido uno. ¿Quién puede ser?*
>
> *Otro le preguntó si había contado bien, y volvió a hacer él mismo la cuenta; ¡pero también él contó solo nueve!*
>
> *Uno tras otro, cada uno de los diez no contó más que nueve, porque todos se dejaban fuera a sí mismos.*
>
> *—No somos más que nueve —coincidieron todos—, pero, ¿quién es el que falta? —se preguntaron.*
>
> *Sin embargo, todos los esfuerzos que hicieron por descubrir al que "faltaba" fracasaron.*
>
> *—Sea quien fuere el que se ha ahogado —dijo el más sentimental de los diez necios—, lo hemos perdido.*
>
> *Y así diciendo prorrumpió en lágrimas y los demás lo imitaron.*
>
> *Al ver que así lloraban a la orilla del río, un viajero se compadeció de ellos y les preguntó la causa. Le relataron lo sucedido y le explicaron que, incluso después de haberse contado varias veces, no podían encontrar más que nueve. Al oír el relato, y puesto que veía a los diez ante él, el viajero comprendió lo sucedido y, para que ellos mismos se dieran cuenta de que eran realmente diez y de que todos habían cruzado sanos y salvos el río, les dijo:*

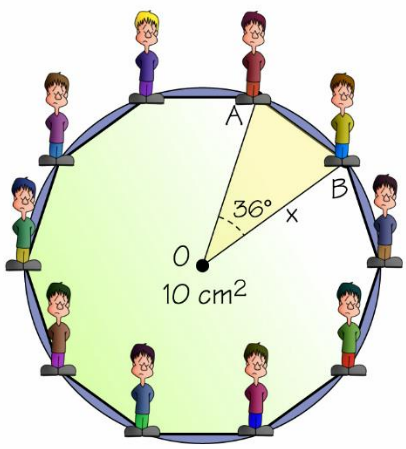
—Volved a hacer cada uno vuestra cuenta, pero uno tras otro, en serie, uno, dos, tres y así sucesivamente, y yo iré dándoos a cada uno un golpe, de manera que todos podáis estar seguros de haber sido incluidos en la cuenta, pero no más de una vez. Entonces encontraremos al décimo, al "desaparecido".
Al oír esto, todos se regocijaron ante la perspectiva de encontrar al camarada "perdido" y aceptaron el método que sugería el viajero.
Mientras el bondadoso viajero iba dando un golpe a cada uno de los diez, el que recibía el golpe se contaba a sí mismo en alta voz.
—Diez —dijo el último, al recibir a su vez el último golpe.
Perplejos, se miraron unos a otros.
—¡Somos diez! —dijeron al unísono y agradecieron al viajero que les hubiese liberado de su dolor.

El hombre decidió dibujar, en los vértices de un decágono regular, a los diez necios que fueron salvados.

—Y me gustaría que el decágono abarque 10 centímetros cuadrados de superficie —se dijo—, para recordar que los necios fueron 10 y no 9, como ellos creían.

Y se puso a pensar: ¿de qué radio debe él trazar la circunferencia para que el decágono, inscrito en ella, abarque ni más ni menos que 10 centímetros cuadrados de superficie? ¡Ayúdale a averiguarlo, por favor!

Debes construir un decágono cuya área abarque exactamente 10 centímetros cuadrados de superficie.



Para ello necesitas conocer el valor del coseno y del seno del ángulo de 36 grados. En la unidad anterior descubriste que:

$$Cos36° = \frac{1}{4}\sqrt{6+2\sqrt{5}}$$

Y también puedes expresarlo de este modo:

$$Cos36° = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$$

Llama *x* al radio de la circunferencia buscada, dentro de la cual vas a inscribir el decágono. El área del triángulo *OAB* puede ser calculada por la siguiente fórmula:

$A_{OAB} = \frac{1}{2}x^2 \cdot Sen36°$

Y, como el área del decágono es $A_{decágono=}10A_{OAB}$, puedes escribir:

$A_{decágono} = 10 \cdot \frac{1}{2}x^2 \cdot Sen36° = 10$

¡Solo necesitas conocer el valor del seno del ángulo de 36 grados!
Con ese objeto, usa la fórmula:

$Sen36° = \sqrt{1 - Cos^2 36°}$

Realiza el reemplazo:

$$Sen36° = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\right)^2}$$

En otras palabras,

$$Sen36° = \sqrt{1 - \frac{1}{4}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)}$$

Ejecuta las operaciones:

$$Sen36° = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$$

Tu ecuación adquiere la siguiente forma:

$$10 \cdot \frac{1}{2}x^2 \cdot \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} = 10$$

¡Solo tienes que resolverla!
Simplifica la ecuación:

$$x^4 \cdot \frac{5-\sqrt{5}}{8} = 4$$

Despeja x^4:

$$x^4 = \frac{32}{5-\sqrt{5}}$$

Racionaliza esta fracción:

$$x^4 = \frac{32}{5-\sqrt{5}} = \frac{5+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}$$

De aquí obtienes:

$$x^4 = \frac{32(5+\sqrt{5})}{25-5} = \frac{8(5+\sqrt{5})}{5}$$

Por tanto, ya conoces la expresión algebraica para tu incógnita:

$$x = \sqrt[4]{\frac{8(5\sqrt{5})}{5}}$$

O, si prefieres, puedes escribirlo así:

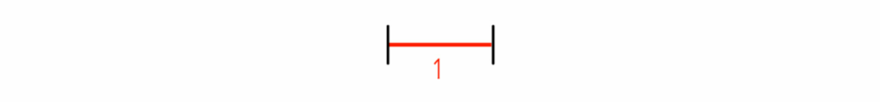
$$x = \sqrt{2 \cdot \sqrt{\frac{2(5+\sqrt{5})}{5}}}$$

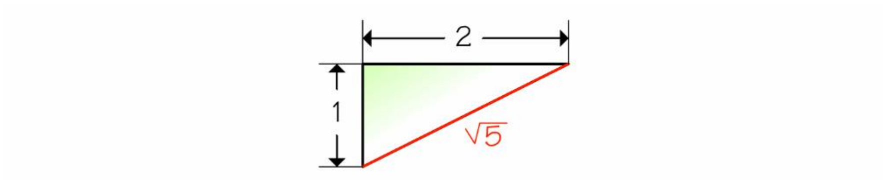
¡Has encontrado el valor del radio de la circunferencia en la cual inscribir tu decágono! Anota tu respuesta algebraica:

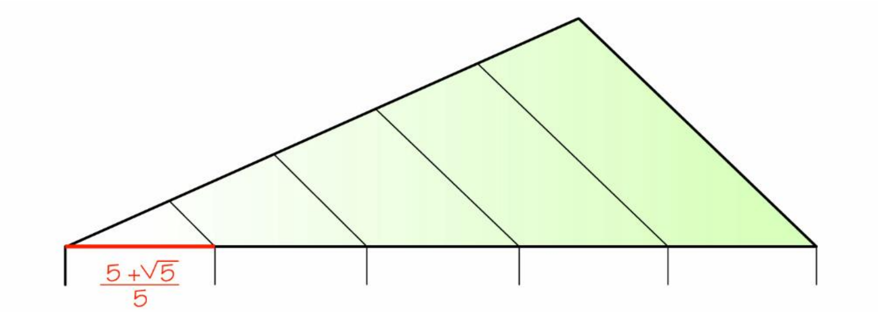
Si se quiere construir un decágono regular de área $10cm^2$, el radio de su circunferencia debe medir $\sqrt{2 \cdot \sqrt{\frac{2(5+\sqrt{5})}{5}}}\,cm$.

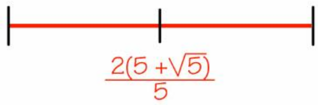
¡El álgebra hizo su contribución exitosamente!

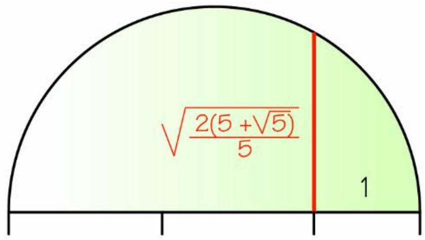
Estás listo para construir tu respuesta geométricamente. Para ello puedes dar los siguientes pasos:

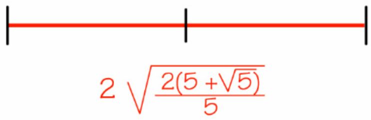


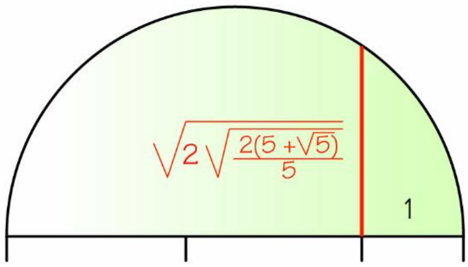


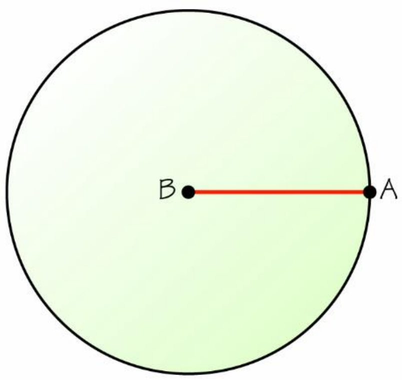










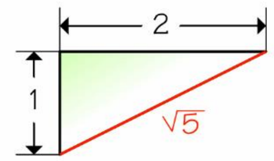


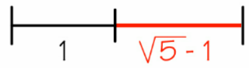
¡Has construido la circunferencia! Tan solo te falta inscribir en ella un decágono regular.

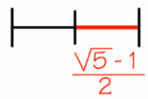
Recuerda que en la unidad anterior demostraste que el lado del decágono regular es el producto de multiplicar el radio de la circunferencia por el número de oro:

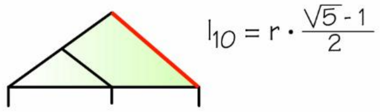
$$l_{10} = r \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

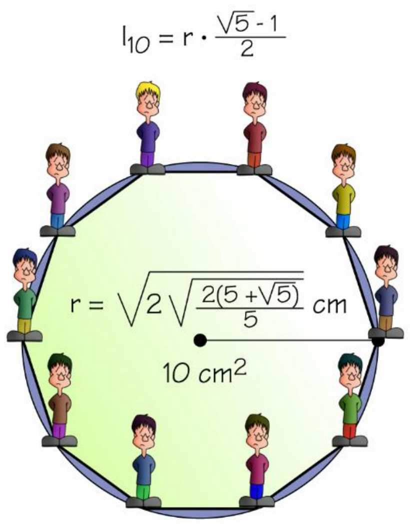
¡Realiza esta construcción geométricamente!
Para ello puedes dar los siguientes pasos:











Anota tu respuesta geométrica:

> **Para construir con regla y compás un decágono regular de área 10 centímetros cuadrados, puedes seguir los pasos que se acaban de indicar.**

¡La regla, el compás y el método algebraico resolvieron el problema brillantemente!, ¿verdad?

Al mirar el decágono todos los días, el hombre recordaba que los necios habían logrado cruzar la corriente.

—Si ellos lo lograron —se decía—, ¡también yo puedo hacerlo!

Y, en efecto, el hombre cruzó el río de la vida sano y salvo. ¿Cómo lo hizo? Es un koan.

20

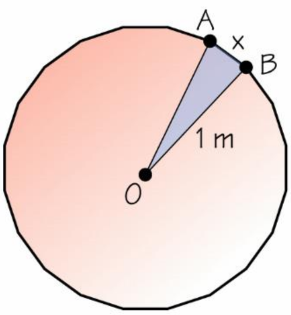
Los peces y el agua

Un rey estaba quedándose ciego. Cada vez veía menos; el médico del palacio le recetaba lentes cada vez más y más gruesos.

—La vista no se restaurará hasta que su majestad observe un estanque de 20 lados con 20 especies de peces —le dijo el consejero, quien era un hombre sabio—. Un espectáculo así es capaz de devolver la vista a cualquiera.

El rey ordenó en seguida que en los jardines del palacio se construyera tal estanque. Al escuchar la orden, el arquitecto se puso a pensar: ¿cómo trazar el polígono regular de veinte lados? ¡Ayúdale a averiguarlo, por favor!

¡Realiza el análisis algebraico del problema! Imagina que has trazado una circunferencia de radio 1 metro y llama *x* a la longitud del lado del polígono a ser inscrito en ella:



El nombre de este polígono es icoságono, y su ángulo central mide 18 grados:

$$\frac{360°}{20} = 18°$$

Llama y a su coseno:

$$y = Cos18°$$

¡Descubre qué ecuación satisface la incógnita y!
En la unidad 18 descubriste el valor del coseno de 36 grados:

$$Cos36° = \frac{1}{4}\sqrt{2\sqrt{5}+6}$$

Como esta vez se trata del ángulo mitad, usa la fórmula trigonométrica:

$$Cos2a = 2Cos^2 a - 1$$

Obtendrás:

$$Cos36° = 2Cos^2 18° - 1$$

Es decir,

$$2Cos^2 18° - 1 = \frac{1}{4}\sqrt{2\sqrt{5}+6}$$

Al realizar las operaciones, se producirá:

$$Cos18° = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{4}\sqrt{2\sqrt{5}+6}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\sqrt{5}+6}{4}}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2}}{2}} =$$

$$\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{5}+1}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+5}{8}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{5}+5}{2}}$$

¡Ya conoces la expresión algebraica para el coseno del ángulo de 18 grados!
El triángulo *OAB* te informa que, por el teorema de los cosenos, se debe cumplir la siguiente igualdad:

$$1^2 + 1^2 - 2Cos18° = |{}^{2}_{20} = x^2$$

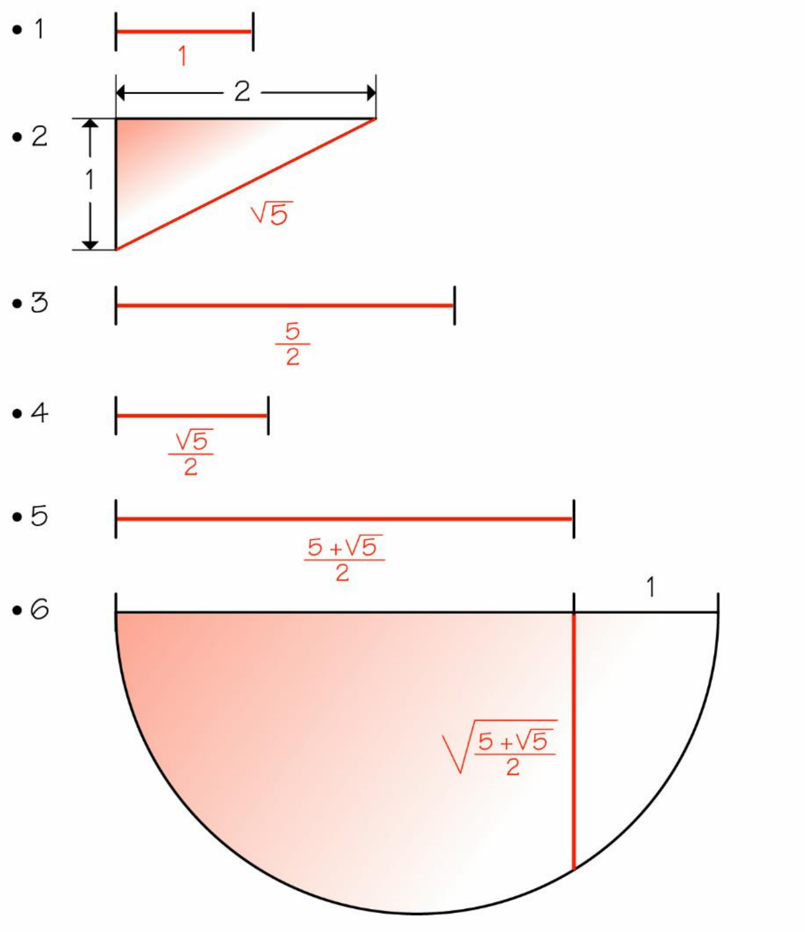
Es decir,

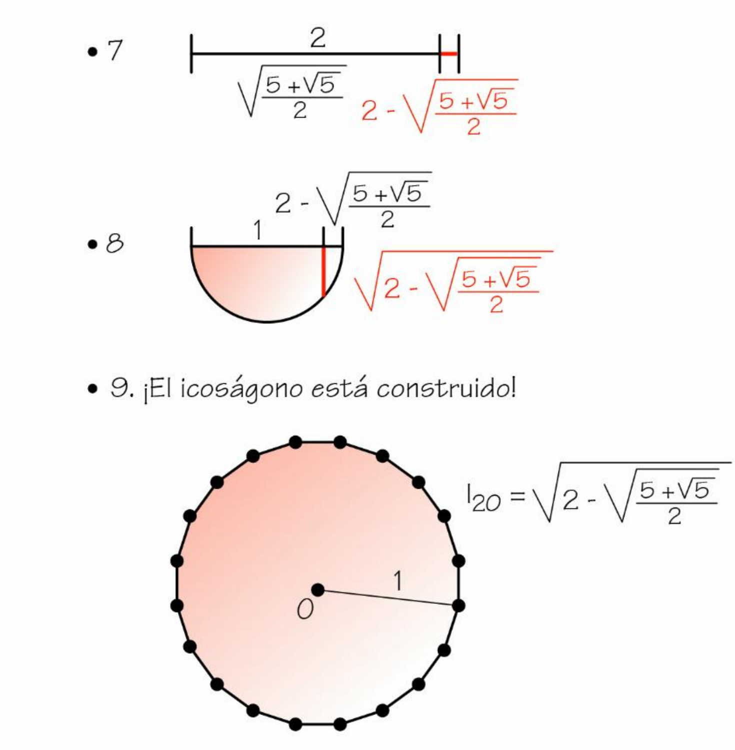
$$x = \sqrt{2 - 2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{5}+5}{2}}} = \sqrt{2-\sqrt{\frac{\sqrt{5}+5}{2}}}\,m.$$

Anota tu respuesta algebraica:

Si se quiere inscribir un icoságono regular dentro de una circunferencia de radio 1 m, el lado de tal icoságono deberá medir $\sqrt{2-\sqrt{\frac{\sqrt{5}+5}{2}}}$ metros.

¡El álgebra hizo su contribución exitosamente!
Estás listo para construir tu respuesta geométricamente. Para ello puedes dar los siguientes pasos:





Anota tu respuesta geométrica:

> **El icoságono regular, inscrito dentro de una circunferencia, se puede construir con regla y compás si se siguen los pasos que se acaban de indicar.**

¡La regla, el compás y el método algebraico resolvieron el problema genialmente!, ¿verdad?

El estanque de 20 lados fue construido y sembrado con peces de 20 especies diferentes. El rey miraba sus colores que brillaban a la luz del sol y se maravillaba de la riqueza de la creación divina. Sin embargo, su vista seguía empeorando.

—¿Por qué no mejora mi visión? —preguntó al consejero.

—Porque su majestad mira a los peces y no al agua —contestó este.

—¿Y por qué debo mirar al agua? —se sorprendió el rey—. El agua es incolora. ¡Es mucho más divertido mirar a los peces, a los cuales Dios pintó de todos los colores!

—Es más divertido mirar a los peces —aceptó el consejero—, pero es más importante mirar al agua. Así su majestad podrá comprender que el agua puede estar sin los peces, pero los peces no pueden estar sin el agua. Los peces son muchos, pero el agua que les sostiene es una sola. Y de la misma manera la vida es múltiple, pero su invisible sostén es uno. ¡Y ese invisible sostén es usted!

La vista del rey se restauró inmediatamente.

21

Newton ayuda a un comerciante

En el año 1670, un comerciante de leche dijo a Isaac Newton:

—Deseo construir bidones cilíndricos, de 50 pintas[7] de volumen cada uno. ¿De qué tamaño debo hacerlos, para que la cantidad de lata sea de 700 pulgadas cuadradas?

Newton tomó papel y pluma, hizo unos cálculos y dijo:

—La altura del bidón debe medir 16.6248 pulgadas.

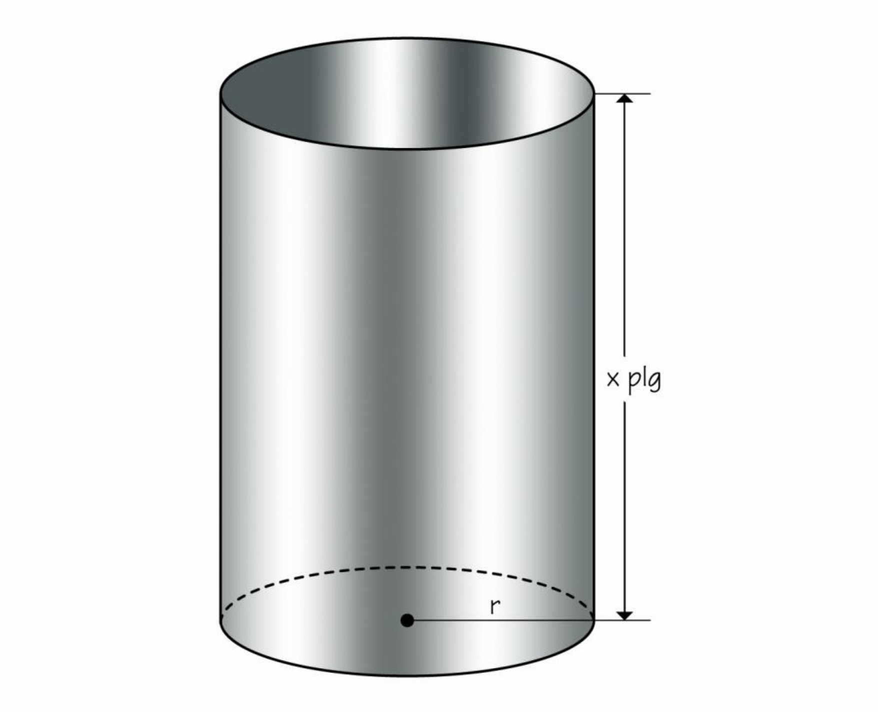
—¿Y qué diámetro tendrá la base del bidón?

—5 pulgadas.

Y Newton dio al comerciante la siguiente explicación. ¡Ayúdale a realizarla, por favor!

Newton llama *x* a la altura del bidón, y *r* a su radio, medidos en pulgadas:

[7] Una pinta equivale a 27 pulgadas cúbicas, es decir, a 0.455 litros.



Entonces, la superficie del bidón, con las dos tapas, puede ser escrita de este modo:

$$S(x, r) = 2\pi r^2 + 2\pi r x$$

Además, entre *r* y *x* hay una relación:

$$\pi r^2 x = 1350 plg^3$$

Pues 50 pintas equivalen a esta cantidad de pulgadas cúbicas de volumen:

$$27 \cdot 50 = 1350 plg^3$$

Newton expresa el radio del bidón en términos de *x*:

$$r = \sqrt{\frac{1350}{\pi x}}$$

Sustituye esta expresión en la fórmula de la superficie:

$$s(x) = \frac{2700}{x} + 2\sqrt{1350\pi x}$$

¡Has hallado la función *superficie*!

Ahora necesitas cumplir la condición del comerciante, igualando la superficie del bidón a 700. Obtienes la siguiente ecuación:

$$\frac{2700}{x} + 2\sqrt{1350\pi x} = 700$$

A ejecutar las operaciones convenientes, se produce lo siguiente:

$$4x^2 \cdot 1350\pi x = (700x - 2700)^2$$

Al aproximar las cantidades, con cinco cifras decimales, Newton escribe la ecuación cúbica de este modo:

$$x^3 - 28.88367x^2 + 222.816924x - 429.71835 = 0$$

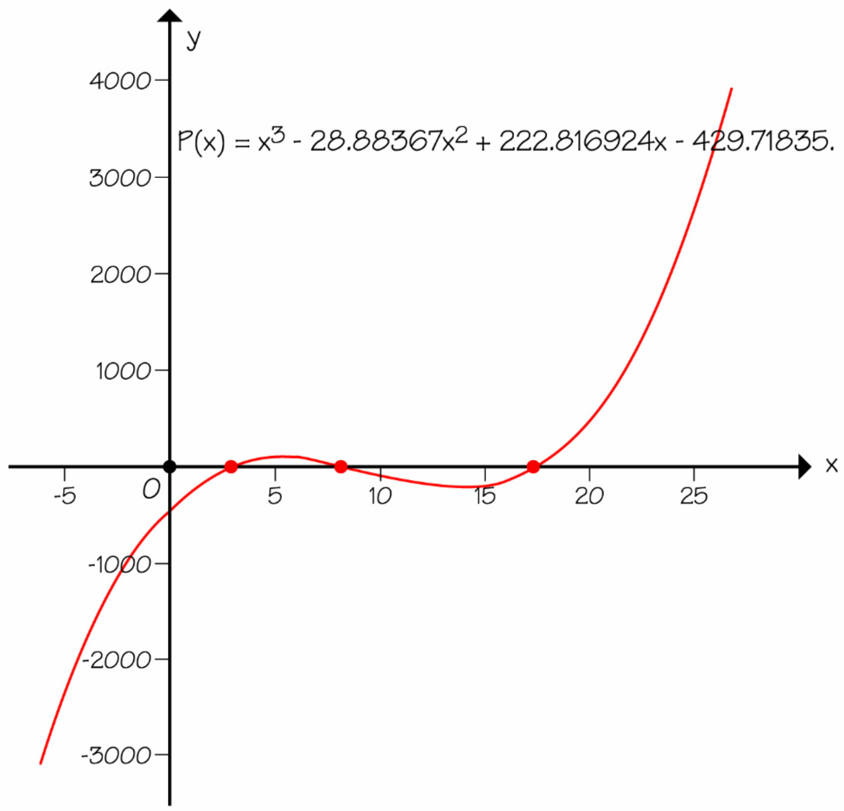
¡Obtuviste una ecuación de tercer grado! Tan solo tienes que resolverla; es decir, descubrir su raíz real que conviene para la fabricación del bidón.
Newton te sugiere que definas el polinomio

$$P(x) = x^3 - 28.88367x^2 + 222.816924x - 429.71835$$

Entonces, solo tienes que encontrar la abscisa de este polinomio que corresponde a la ordenada *y = 0*. Para ello calcula algunos de los valores de este polinomio:

x	*0*	*5*	*10*	*15*	*20*
P(x)	*-430*	*82*	*-90*	*-211*	*473*

En seguida realiza su gráfico aproximado:



¡Ahora él solamente tiene que averiguar para qué altura del bidón este polinomio se hace igual a cero!

Como el gráfico le dice que la abscisa buscada debe encontrarse entre 17 y 18 pulgadas, Newton lo comprueba:

$$17^3 - 28.88367 \cdot 17^2 + 222.816924 \cdot 17 - 429.71835 = -76.21281714 < 0$$

Mientras que:

$$18^3 - 28.88367 \cdot 18^2 + 222.816924 \cdot 18 - 429.71835 = -54.675470 > 0$$

¡De modo que debe haber una raíz entre 17 y 18 pulgadas! Newton lo anota:

$$x_0 = 18$$

El matemático inglés representa a la raíz desconocida como:

$$x_1 = 18 + p$$

De este modo, al reemplazar esta expresión en la ecuación, se puede escribir:

$$(18 + p)^3 - 28.88367(18 + p)^2 + 222.816924(18 + p) - 429.71835 = 0$$

¡Se obtiene una ecuación cúbica en *p*! Es esta:

$$p^3 - 25.1163p^3 + 155.0048p + 54.677202 = 0$$

Si se desprecian los términos cúbico y cuadrático, Newton debe resolver la siguiente ecuación lineal:

$$155.004804 \cdot p + 54.67720199 = 0$$

De aquí Newton despeja el valor de *p*:

$$p = -0.3527452$$

De este modo se obtuvo una aproximación de la raíz buscada:

$$x_1 = 18 - 0.3527452 = 17.6472548$$

Ahora, Newton representa *p* como $(-0.3527452 + q)$:

$$p = -0.3527452 + q$$

Entonces,

$$x_2 = 17.6472548 + q$$

Reemplaza esta expresión en la ecuación:

$$(17.6472548 + q)^2 - 28.88367(17.6472548 + q)^2 + 222.816924(17.6472548 + q) - 429.71835 = 0$$

¡Para q se debe cumplir una ecuación cúbica! Y es esta:

$$q^3 + 24.0580944q^2 + 137.6587618q + 3.08131866 = 0$$

Al despreciar todos los términos salvo los lineales, Newton obtiene la siguiente ecuación lineal para el valor de q:

$$137.6587618 \cdot q + 3.081313866 = 0$$

De aquí, Newton infiere el valor de q :

$$q = 0.0223837$$

De este modo se obtuvo la siguiente aproximación de la raíz buscada:

$$x_2 = 17.6472548 - 0.0223837 = 17.6248711$$

Para seguir con el proceso, Newton representa q como $-0.0223837 + r$:

$$q = -0.0223837 + r$$

Entonces,

$$x_3 = 17.6248711 + r$$

Reemplaza esta expresión en la ecuación:

$$(17.6248711 + r)^3 - 28.88367(17.6248711 + r)^2 + 222.816924(17.6248711 + r) - 429.71835 = 0$$

Obtiene la siguiente ecuación cúbica:

$$r^3 + 23.9909433r + 136.5832465r + 0.01204405214 = 0$$

Despreciando todos los términos salvo los lineales, Newton obtiene la siguiente ecuación lineal:

$$136.5832465r + 0.01204405214 = 0$$

Newton ya conoce el valor de r:

$$r = -0.000088181$$

De este modo, se obtuvo la siguiente aproximación de la raíz buscada:

$$x_3 = 17.6248711 - 0.000088181 = 17.6248plg$$

¡Y es una aproximación muy buena! En efecto:

$$17.6248^3 - 28.88367 \cdot 17.6248^2 + 222.816924 \cdot 17.6248 - 429.71835 = 0.02 \simeq 0$$

Es decir, la altura del bidón debe medir

$$x = 17.6248plg$$

Ahora, Newton calcula el radio de la base:

$$r = \sqrt{\frac{1350}{17.6248\pi}} = 4.9378plg$$

Lo que significa que su diámetro medirá el doble:

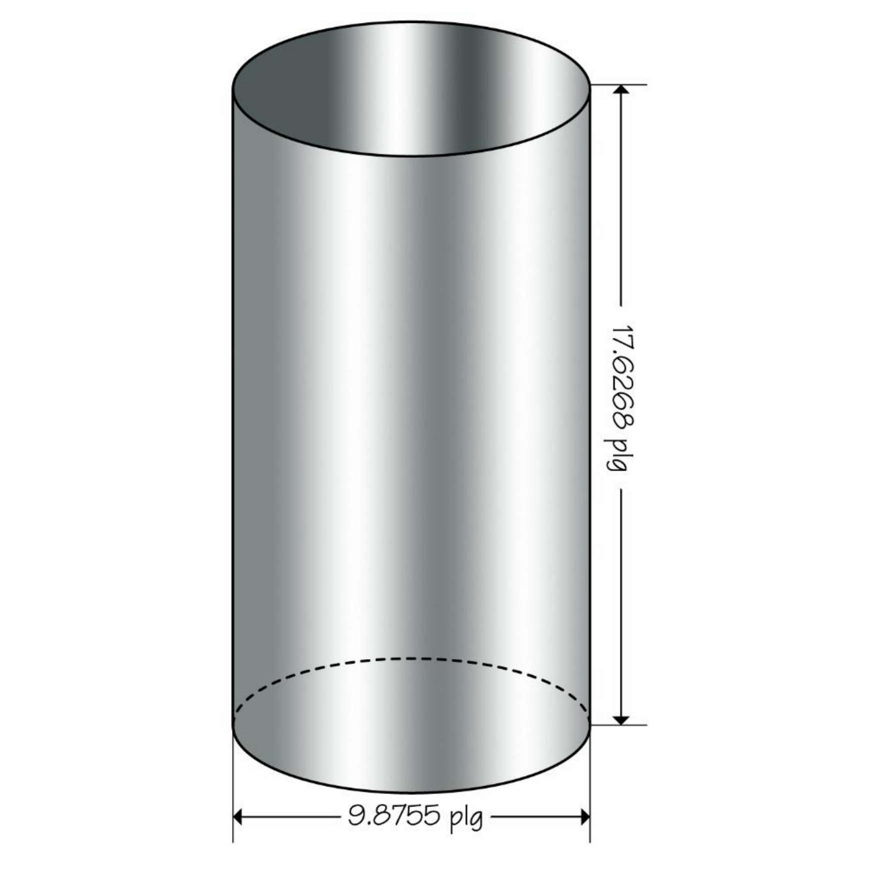
$$d = 2 \cdot 4.9378 = 9.8755plg$$

Newton calcula la cantidad de lata que necesitará el bidón para su elaboración:

$$S(17.6248) = \frac{2700}{17.6248} + 2\sqrt{1350 \cdot 17.6248 \cdot \pi} = 700.000plg^2$$

¡Tal y como era requerido! Anota la respuesta de Isaac Newton:

> **Si se quiere que la superficie del bidón abarque 700 pulgadas cuadradas, la altura del bidón deberá medir 17.6248 pulgadas, y el diámetro, 9.8755.**



¡El método de Newton resolvió el problema brillantemente!, ¿verdad?

—¡Se lo agradezco, sir! —dijo el comerciante a Isaac Newton—. Siempre escuchaba decir que la ciencia puede ser muy útil en nuestras vidas. ¡Ahora lo sé!

22

La medalla de oro

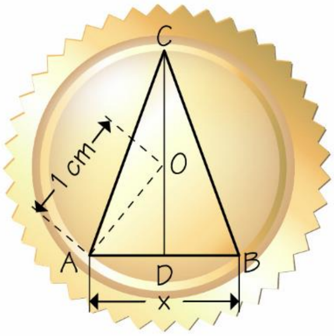
Un deportista ansiaba ardientemente recibir, en alguna competencia importante, la medalla de oro. Pero sus oraciones eran vanas, pues la medalla de oro, invariablemente, se la llevaba a casa alguno de sus rivales.

El deportista decidió premiarse a sí mismo con una medalla de oro de su propia fabricación. Con tal propósito, pidió a un orfebre que la fabricara de forma redonda, con el diámetro de la circunferencia igual a 2 cm, y un triángulo isósceles inscrito en ella de área de 1 cm^2.

El orfebre sabía que Isaac Newton había encontrado un método para encontrar las raíces de ecuaciones algebraicas con tantos decimales como uno quiera. Tomó del estante un libro de Newton y se puso a pensar: ¿de qué dimensiones deberá él trazar el triángulo? ¡Ayúdale a averiguarlo, por favor!

Imagina que la medalla ya ha sido diseñada y el triángulo isósceles *ABC* ha sido inscrito en ella.

Llama *x* a la base del triángulo isósceles, del segmento *AB*:



Entonces, el área del triángulo *ABC* puede ser calculada de este modo:

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD$$

Aplica el teorema de Pitágoras en el triángulo *AOD*:

$$AD^2 + OD^2 = 1^2$$

Así obtienes que:

$$OD = \frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}$$

Además, sabes que:

$$CD = 1 + OD$$

Reemplaza estos datos en el área del triángulo *ABC*:

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}\right) = 1$$

Acomoda la ecuación de manera que se elimine el radical, y eleva todo al cuadrado:

$$\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2 = \left(\frac{4-2x}{x}\right)^2$$

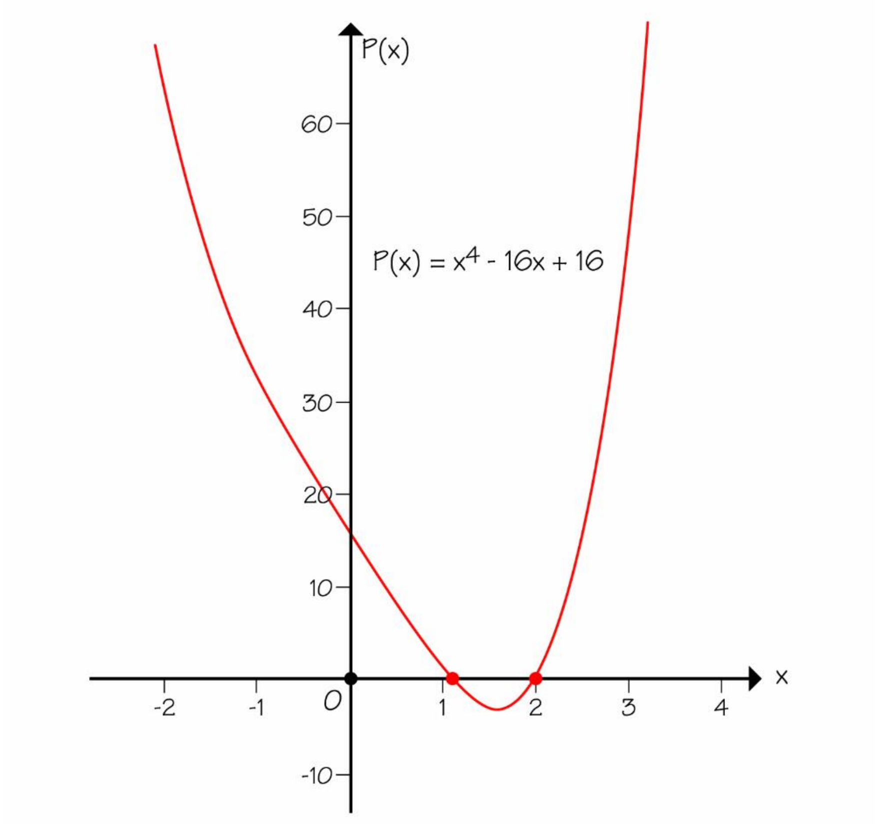
Al simplificar, obtendrás esta ecuación de cuarto grado:

$$x^4 - 16x + 16 = 0$$

¡Aplica el método de Newton para resolverla! Define un polinomio que puedes llamar P:

$$P(x) = x^4 - 16x + 16$$

¡Estás buscando las raíces de este polinomio! Para que tengas una idea dónde están esas raíces, utiliza un gráfico de funciones:



La primera raíz está entre 1 y 2; la segunda *raíz parece* ser exacta e igual a 2. ¡Verifica la última afirmación! El cálculo es inmediato: al reemplazar el valor de 2 en el polinomio, obtienes que

$$P(2) = 2^4 - 16 \cdot 2 + 16 = 0$$

¡Has encontrado una raíz del polinomio *P(x)*!

Para hallar la otra raíz, aplica el método de Newton. Empieza con el valor entero 1 más un pequeño incremento. Sea x_0 la primera aproximación al valor de la raíz, y p un incremento. Entonces, puedes escribir:

$x_0 = 1 + p$

Como x_0 es raíz, obtienes:

$$P(1 + p) = (1 + 4)^4 - 16(1 + p) + 16 = 0$$

Luego de desarrollar el binomio, consigues saber que:

$$1^4 + 4 \cdot 1^3 p + 6 \cdot 1^2 p^2 + 4 \cdot 1p^3 + p^4 - 10 - 16p + 16 = 0$$

Newton sostiene que los términos p^2, p^3 y p^4 son valores tan pequeños respecto de p, que los puedes despreciar y considerarlos iguales a cero. Al simplificar, te queda:

$$1 - 12p = 0$$

El valor de p será de:

$$p = 0.083333$$

Con este valor de p obtienes tu x_0:

$$x_0 = 1 + p = 1.083333$$

Sea x_1 la segunda aproximación a la raíz, y q el pequeño incremento:

$$x_0 = 1 + p = 1.083333$$

Como x_1 es raíz del polinomio, puedes escribir:

$$P(1.083333 + q) = (1.083333 + q)^4 - 16(1.083333 + q) + 16$$

Desarrolla el binomio:

$$1.083333^4 + 4(1.083333)^3 q + \cdots - 17.333333 - 16q + 16 = 0$$

Como q^2, q^3 y q^4 son valores muy pequeños respecto de q, los puedes despreciar y considerarlos iguales a cero. Al simplificar, hallas el valor de q:

$$q = 0.00403$$

Con este valor de q obtienes x_1:

$$x_1 = 1.083333 + q = 1.087367$$

Puedes repetir esta iteración tantas veces cuantas lo necesites. Mientras más veces lo hagas, el valor de la raíz será más exacta. Repitiendo cuatro veces, obtendrás los siguientes resultados:

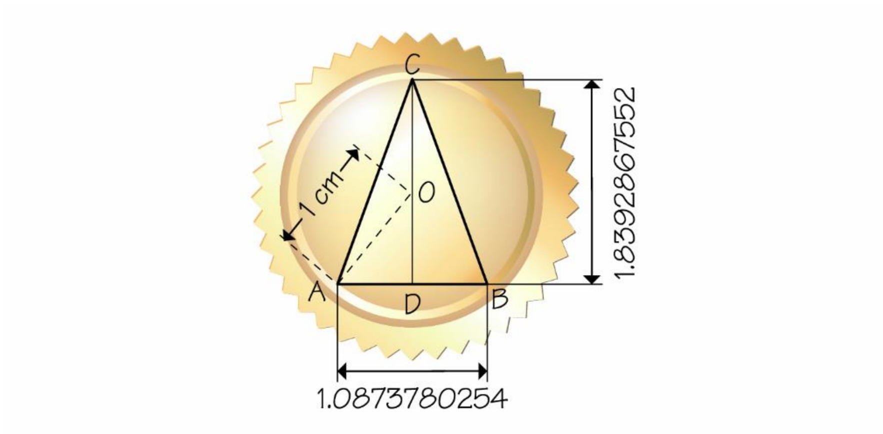
n	Incremento	x_n
0	0.0833333333	1.0833333333
1	0.0040341111	1.0873674443
2	0.0000105810	1.0873780253
3	0.00	1.08

	0 0 0 0 0 0 0 1	7 3 7 8 0 2 5 4

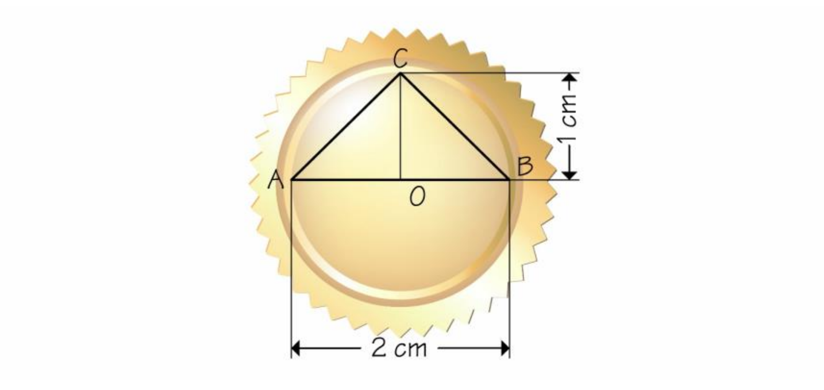
Anota tu respuesta:

> **El problema admite dos respuestas: un triángulo isósceles *ABC* de base 1.0873780254 cm y altura 1.8392867552 cm, y otro triángulo isósceles de base 2 cm y altura 1 cm. Los dos poseen un área de 1 cm^2.**

La primera solución para el diseño de la medalla es esta:



Y la segunda, esta:



¡El método de Newton resolvió el problema brillantemente!, ¿verdad?

Para la fabricación de la medalla se escogió la primera alternativa.

Luego, nuestro deportista, se encerraba a menudo en su dormitorio, se ponía la medalla en el cuello y se miraba en el espejo. En cierta ocasión, escuchó una voz que parecía proceder del Cielo:

—El verdadero oro no es la medalla: ¡es tu Alma! Después de miles de años, la medalla se hará añicos, pero tu alma es incorruptible.

El deportista meditó en estas palabras, y pronto descubrió su Alma Inmortal. Y fue así como se realizó su deseo más profundo: recibir una medalla de oro.

23

La olla del Panecillo

Había en Quito una mujer que diariamente llevaba su vaquita al Panecillo.

Un buen día, mientras recogía un poco de leña, dejó a la vaquita cerca de la olla que todavía hay en la cima de la colina. ¡Pero, a su regreso, ya no encontró a su vaquita! Angustiada, se puso a buscarla por los alrededores, pero todo fue en vano.

Al seguir buscando, la mujer bajó hasta el fondo de la olla. Su sorpresa fue muy grande cuando llegó a la entrada de un hermoso palacio. Entró en él, y vio que en un lujoso trono estaba sentada una bella princesa.

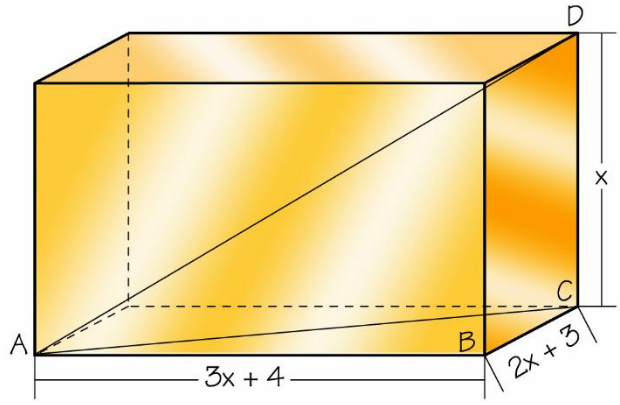
—¿Cuál es el motivo de tu visita? —le preguntó la princesa, sonriendo amablemente.

—¡He perdido a mi vaquita! —contestó la mujer sollozando—. Y si no la encuentro, quedaré en la mayor miseria.

—¡Oh, tu vaquita está a salvo en el prado! —aseguró la princesa—. Y, ya que viniste a buscarla, te la puedes llevar de vuelta. Además, toma esta mazorca y este ladrillo de oro.

El ladrillo tenía dimensiones especiales: su ancho superaba al duplo de su altura en 3 centímetros y su largo superaba al triplo de su altura en 4 centímetros; además, la setentava parte de su volumen excedía a la diagonal en 5. ¿Puedes decir de qué dimensiones era el ladrillo de oro?

Llama x a la altura del ladrillo. Entonces, su ancho debe medir $(2x + 3)$ centímetros, y su largo, $(3x + 4)$.



El volumen del ladrillo es el producto de las tres magnitudes:

$V = x \cdot (2x + 3) \cdot (3x + 4)$

¡Ahora tienes que calcular su diagonal *AD*!

Al usar el teorema de Pitágoras, primero expresa la diagonal *AC* del triángulo rectángulo *ABC:*

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = (3x + 4)^2 + (2x + 3)^2$

Luego expresa la diagonal *AD* del triángulo rectángulo *ADC*:

$AC^2 = AB^2 + DC^2 = x^2 + (2x + 3)^2 + (3x + 4)^2$

¡Has logrado expresar la diagonal en términos de *x*!

$AD = \sqrt{x^2 + (2x + 3)^2 + (3x + 4)^2}$

Y, como la setentava parte de su volumen excede a la diagonal en 5, puedes escribir:

$\frac{1}{70} \cdot x \cdot (2x + 3) \cdot (3x + 4) - 5 = \sqrt{x^2 + (2x + 3)^2 + 3x + 4^2}$

Eleva al cuadrado ambos miembros:

$\left(\frac{x \cdot (2x+3) \cdot (3x+4)}{70}\right)^2 = x^2 + (2x + 3)^2 + 3x + 4^2$

Ejecuta las operaciones algebraicas:

$\frac{9}{1225}x^6 + \frac{51}{1215}x^5 + \frac{433}{4900}x^4 - \frac{948}{1225}x^3 - \frac{20089}{1225}x^2 - \frac{264}{7}x = 0$

Divide todo para x:

$\frac{9}{1225}x^5 + \frac{51}{1215}x^4 + \frac{433}{4900}x^3 - \frac{948}{1225}x^2 - \frac{20089}{1225}x - \frac{264}{7} = 0$

¡Obtuviste una ecuación de quinto grado! Tan solo tienes que resolverla, es decir, descubrir su raíz positiva.

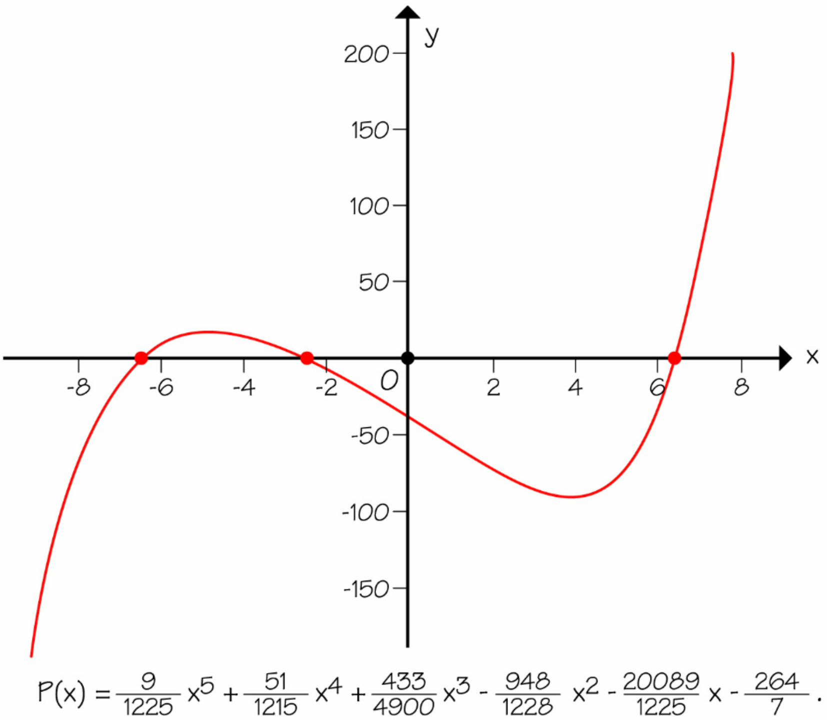
Al seguir el método de Newton, define el polinomio

$$P(x) = \frac{9}{1225}x^5 + \frac{51}{1215}x^4 + \frac{433}{4900}x^3 - \frac{948}{1225}x^2 - \frac{20089}{1225}x - \frac{264}{7}$$

¡Solo tienes que encontrar la abscisa que corresponde a la ordenada nula! Para ello calcula algunos de los valores de este polinomio:

x	0	2	4	6	7
P(x)	-37.714	-72	-91.856	-33.796	63.321

En seguida, realiza su gráfico aproximado:



¡Ahora solamente tienes que averiguar para qué valor de *x* este polinomio se hace igual a 0! Como puedes ver, aquello sucede entre 6 y 7: $P(6) = -33.796 < 0$. Mientras que $P(7) = 63.321 > 0$.

Y parece que la raíz está más cercana a 6 que a 7, de modo que puedes escoger, como primera aproximación, el valor de x igual a 6. Anótalo:

$x_0 = 6$

Representa a la raíz desconocida como

$x_1 = 6 + p$

Al reemplazar esta expresión en la ecuación, puede escribir:

$$\frac{9}{1225}(6+p)^5+\frac{51}{1225}(6+p)^4+\frac{433}{4900}(6+p)^3-\frac{948}{1225}(6+p)^2$$
$$-\frac{20089}{1255}(6+p)-\frac{264}{7}=0$$

¡Se obtuvo una ecuación de quinto grado en p! Es ésta:

$$\frac{9}{1225}p^5+\frac{321}{1225}p^4+\frac{18289}{4900}p^3-\frac{62913}{1225}p^2+\frac{16552}{245}p-\frac{1556}{49}=0$$

Si se desprecian las potencias superiores, tan solo debes resolver la siguiente ecuación lineal:

$$\frac{16552}{245}p-\frac{1556}{49}=0$$

Despeja el valor de p:

$$p=0.50115$$

Obtuviste una aproximación de la raíz buscada:

$$x_1=6+0.50115=6.50115$$

Ahora representa p como $(0.50115+q)$:

$$p=0.50115+q$$

Entonces,

$$x_2=6.50115+q$$

Reemplaza esta expresión en la ecuación:

$$\frac{9}{1225}(6.50115+q)^5+\frac{51}{1225}(6.50115+q)^4+\frac{433}{4900}(6.50115+q)^3$$
$$-\frac{948}{1225}(6.50115+q)^2-\frac{20089}{1225}(6.50115+q)-\frac{264}{7}=0$$

¡Para q se debe cumplir una ecuación de quinto grado! Pero, despreciando todos los términos salvo los lineales, obtienes la siguiente ecuación lineal:

$$438.3986254\cdot q+32.68989973=0$$

Ya puedes inferir el valor de q:

$$q=-0.071364885$$

Obtuviste esta aproximación de la raíz buscada:

$$x_2 = 6.50115 + q = 6.50115 - 0.071364885 = 6.429785$$

Para seguir con el proceso, representa q como (-0.071364885+r):

$$q = -0.071364885 + r$$

Entonces,

$$x_3 = 6.429785 + r$$

Reemplaza esta expresión en la ecuación:

$$\frac{9}{1225}(6.429785 + r)^5 + \frac{51}{1225}(6.429785 + r)^4 + \frac{433}{4900}(6.429785 + r)^3$$
$$-\frac{948}{1225}(6.429785 + r)^2 - \frac{20089}{1225}(6.429785 + r) - \frac{264}{7} = 0$$

Despreciando todos los términos salvo los lineales, obtienes la siguiente ecuación lineal para el valor de r:

$$589.604390 \cdot r + 1.517408831 = 0$$

Ya resolviste el misterio:

$$r = -0.0025736$$

De este modo obtuviste la siguiente aproximación de la raíz buscada:

$$x_3 = 6.429785 + r = 6.429785 - 0.0025736 = 6.4272$$

¡Es una buena aproximación! En efecto:

$$\frac{9}{1225}6.42972^5 + \frac{51}{1225}6.42972^4 + \frac{433}{4900}6.42972^3$$
$$-\frac{948}{1225}6.42972^2 - \frac{20089}{1225}6.42972 - \frac{264}{7} = 0.0007 \simeq 0$$

Como ya conoces, la altura del ladrillo es:

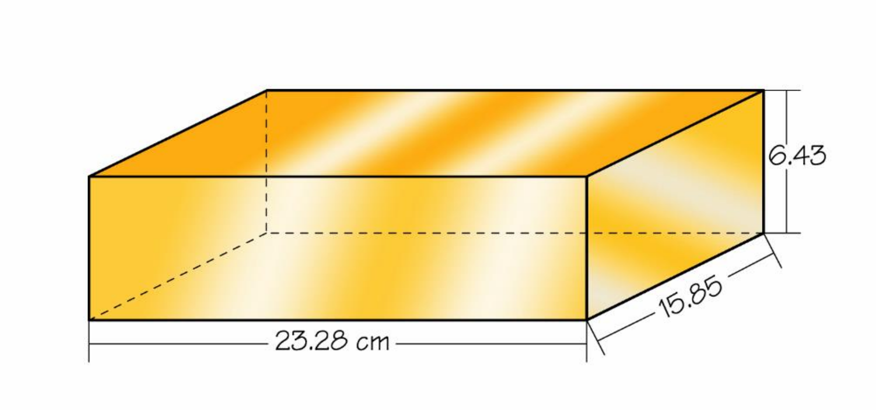
$$x = 6.4272cm.$$

Entonces, también puedes conocer su largo y su ancho:

$$ancho = 2x + 3 = 2 \cdot 6.4272 + 3 = 15.85cm.$$
$$largo = 3x + 4 = 3 \cdot 6.4272 + 4 = 23.28cm.$$

Anota tu respuesta:

El ladrillo de oro tenía las siguientes dimensiones: $\mathbf{6.43}\boldsymbol{cm} \times \mathbf{15.85}\boldsymbol{cm} \times \mathbf{23.28}\boldsymbol{cm}$.

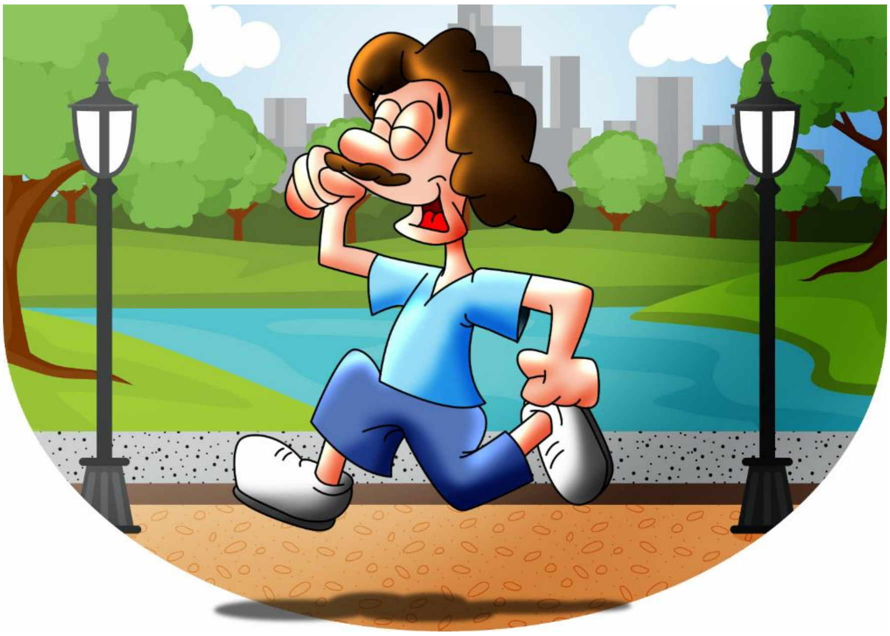


¡El método de Newton resolvió el problema brillantemente!, ¿verdad?

La pobre mujer tuvo lágrimas de gratitud por una generosidad tan grande. Salió feliz del palacio, sujetando contra el pecho el maravilloso obsequio. Y, apenas llegó a la puerta de la olla, vio a su vaquita que le lanzó un mugido y movió con cariño la cola.

Cuando Dios te quita algo, no es para dejarte desvalido: ¡es para darte algo mejor! ¡La desaparición de la vaca anuncia la llegada de un ladrillo de oro!

La mujer y la vaquita se dirigieron a su hogar, donde vivieron felices por el resto de sus días.



24

El amuleto de la energía

Un hombre perdió la energía. De pronto, ya no podía ni levantarse de la cama. Esperaba en vano que la energía regrese: ¡el desánimo seguía y seguía!

Entonces decidió recuperar las energías perdidas. Un mago le dijo:

—¡Es muy fácil! Solo tienes que mandar a fabricar un amuleto en forma de pirámide de base cuadrada. En la antigüedad, los sacerdotes egipcios descubrieron que esas pirámides generan dentro de ellas buenas energías. Enterraban allí a sus muertos para que puedan volver a la vida. Si te haces una pirámide de madera de pino y la miras todos los días, tus energías regresarán.

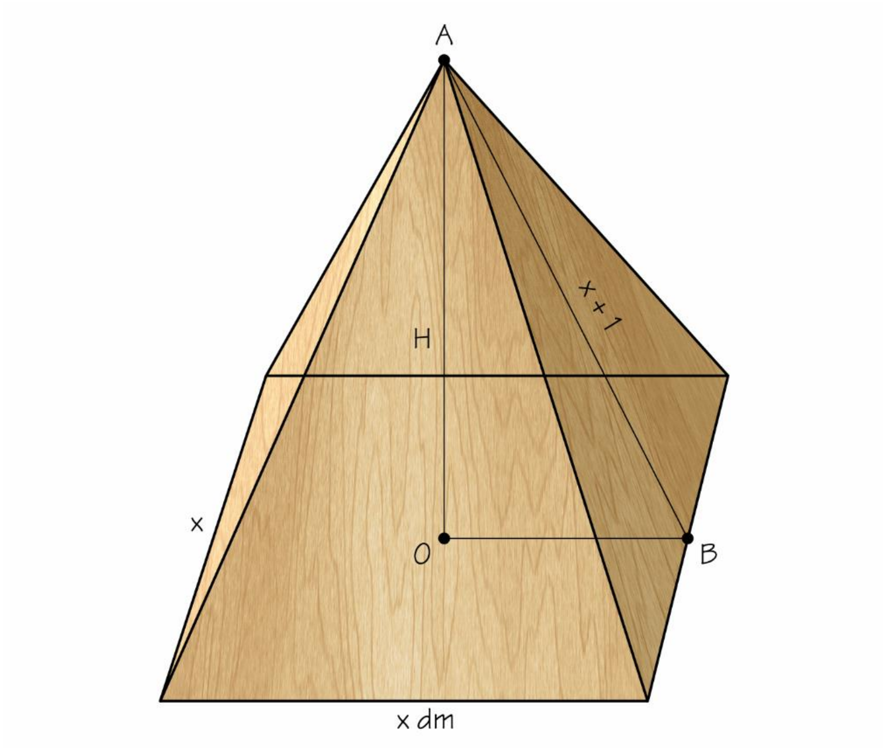
—¿De qué dimensiones debo hacerla?

El mago echó las cartas y contestó:

—Si se mide en decímetros, la altura de la cara lateral de tu pirámide debe superar al lado de la base en 1 unidad; y también debe superar el área de la base al volumen de la pirámide en 1 unidad.

Al hombre le gustaba la carpintería, así que decidió fabricar la pirámide él mismo. En este momento él está deliberando: ¿cuántos decímetros debe medir el lado del cuadrado de la base de la pirámide y cuántos la altura? ¡Ayúdale a averiguarlo, por favor!

Llama x a la longitud de la base cuadrada de la pirámide, medida en decímetros. Entonces, la altura de la arista medirá $(x+1)$ decímetros.



El área de la base de la pirámide mide x^2 decímetros cuadrados; ¡solo te falta calcular su volumen!

Para ello recuerda el descubrimiento de Demócrito: el volumen de una pirámide es la tercera parte del volumen del prisma de la misma base y altura. Es decir:

$$V = \frac{1}{3}x^2 \cdot H$$

Al usar el teorema de Pitágoras, puedes expresar *H* del triángulo rectángulo *AOB*:

$$H^2 = (x+1)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{3x^2}{4} + 2x + 1$$

Es decir,

$$H = \sqrt{\frac{3x^2}{4} + 2x + 1}$$

¡Ya puedes expresar el volumen de la pirámide en términos de *x*!

$$V(x) = \frac{1}{3}x^2 \cdot \sqrt{\frac{3x^2}{4} + 2x + 1}$$

Ahora necesitas cumplir la condición del mago, igualando el área de la base de la pirámide con su volumen aumentado en *1*. Obtienes la siguiente ecuación:

$x^2 = \frac{1}{3}x^2 \cdot \sqrt{\frac{3x^2}{4} + 2x + 1}$

También la puedes escribir así:

$x^2 - 1 = \frac{1}{3}x^2 \cdot \sqrt{\frac{3x^2}{4} + 2x + 1} + 1$

Para deshacerte de la raíz, eleva ambos miembros al cuadrado. Se producirá:

$(x^2 - 1)^2 = \frac{1}{9}x^4 \cdot \left(\frac{3X^2}{4} + 2x + 1\right)$

Ejecuta las operaciones algebraicas:

$\frac{1}{12}x^6 + \frac{2}{9}x^5 - \frac{8}{9}x^4 + 2x^2 - 1 = 0$

¡Obtuviste una ecuación de sexto grado! Tienes que resolverla, es decir, descubrir su raíz real, que conviene para la construcción de la pirámide de las buenas energías.

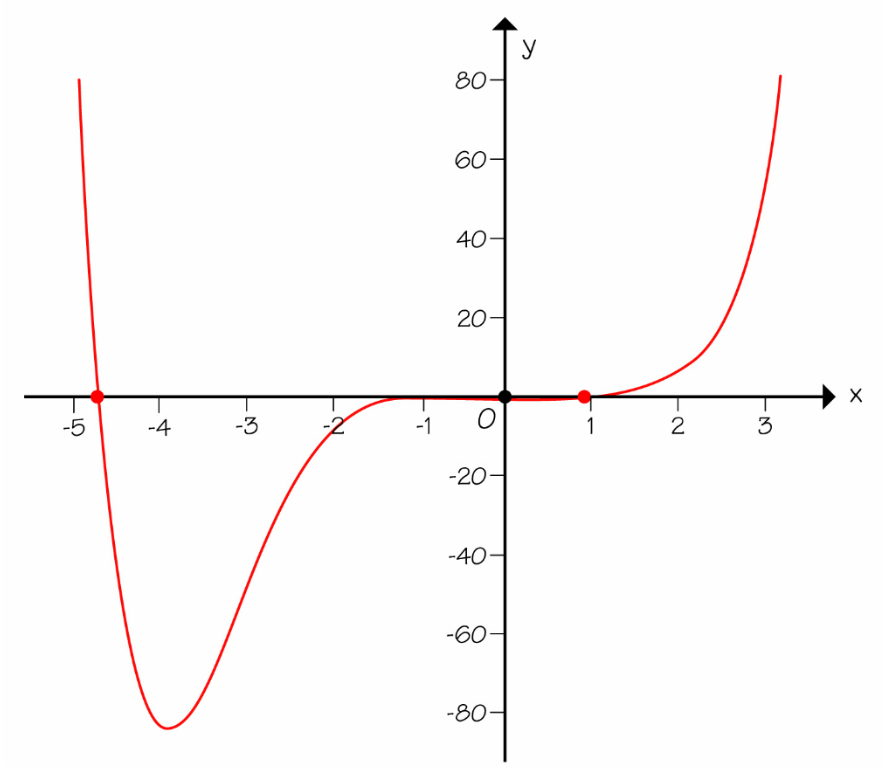
Al seguir el método de Newton, define el polinomio:

$P(x) = \frac{1}{12}x^6 + \frac{2}{9}x^5 - \frac{8}{9}x^4 + 2x^2 - 1$

Entonces, solo tienes que encontrar la abscisa que corresponde a la ordenada nula. Para ello calcula algunos de los valores de este polinomio:

x	0	1	2	3	4
P(x)	-1	0.4167	5.2222	59.75	372.333

En seguida realiza su gráfico aproximado:



$P(x) = \frac{1}{12}x^6 + \frac{2}{9}x^5 - \frac{8}{9}x^4 - 2x^2 - 1.$

¡Solamente tienes que averiguar para qué valor de *x* este polinomio se hace igual a 0! Como puedes ver, aquello sucede entre 0 y 1:

$$P(0) = -1 < 0$$

Mientras que:

$$P(01) = 0.3888 > 0$$

Y parece que la raíz está más cercana a 1 que a 0, de modo que puedes escoger, como primera aproximación, el valor de *x* igual a 1. Anótalo:

$$x_0 = 1$$

Representa a la raíz desconocida como

$$x_1 = 1 + p$$

De este modo, si se reemplaza esta expresión en la ecuación, puedes escribir:

$$\frac{1}{12}(1+p)^6 + \frac{2}{9}(1+p)^5 - \frac{8}{9}(1+p)^4 + 2(1+p)^2 = 1 = 0$$

¡Se obtiene una ecuación de sexto grado en *p*! Es ésta:

$\frac{1}{12}p^6 + \frac{13}{18}p^5 - \frac{53}{36}p^4 + \frac{1}{3}p^3 + \frac{5}{36}p^2 + \frac{37}{18}p + \frac{5}{12} = 0$

Al despreciar los términos cúbico y cuadrático, tan solo debes resolver la siguiente ecuación lineal:

$\frac{37}{18}p + \frac{5}{12} = 0$

Despeja el valor de p:

$p = -0.2027$

De este modo obtuviste una aproximación de la raíz buscada:

$x_1 = 1 - 0.2027 = 0.7973$

Ahora representa p como $(-0.20588 + q)$:

$p = -0.2027 + q$

Entonces,

$x_2 = 0.7973$

Reemplaza esta expresión en la ecuación:

$$\frac{1}{12}(0.7973 + q)^6 + \frac{2}{9}(0.7973 + q)^5 - \frac{8}{9}(0.7973 + q)^4 + 2(0.7973 + q)^2 - 1 = 0$$

¡Para q se debe cumplir una ecuación de sexto grado! Pero, despreciando todos los términos salvo los lineales, obtienes la siguiente ecuación lineal:

$1.997217362 \cdot q + 0.005179989142 = 0$

Ya puedes inferir el valor de q:

$q = -0.0025936$

Obtuviste la siguiente aproximación de la raíz buscada:

$x_2 = 0.7973 + q$

Para seguir con el proceso, representa q como $(-0.0025936 + r)$:

$q = -0.0025936 + r$

Entonces, $x_3 = 0.7947064 + r$.

Reemplaza esta expresión en la ecuación:

$\frac{1}{12}(0.7947064+r)^6+\frac{2}{9}(0.7947064+r)^5-\frac{8}{9}(0.7947064+r)^4+2(0.7947064+r)^2-1=0$

Si se desprecia todos los términos salvo los lineales, obtienes la siguiente ecuación lineal:

$1.995955r+0.000001638=0$

Ya conoces el valor de r:

$r=-0.00000082$

Has hallado la siguiente aproximación de la raíz buscada:

$x_3=0.7947064-0.00000082=0.79470558$

¡Es una aproximación muy buena! En efecto:

$$\frac{1}{12}\cdot 0.79470558^6\,\frac{2}{9}\cdot 0.79470558^5-\frac{8}{9}\cdot 0.79470558^4+2\cdot 0.79470558^2-1$$

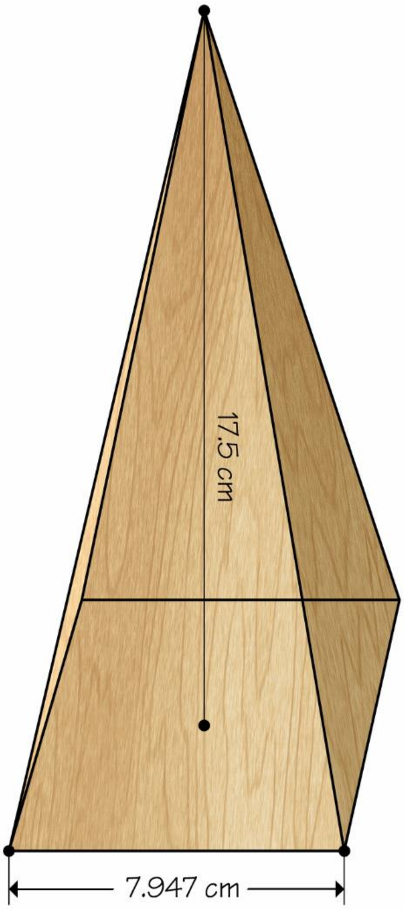
$=0.000000001\simeq 0$

Calcula la altura de la pirámide:

$$H=\sqrt{\frac{3\cdot 0.7947^2}{4}+2\cdot 0.7947+1}=1.750dm$$

Anota tu respuesta:

La base de la pirámide debe medir 7.947×7.947 centímetros, y la altura, 17.5 centímetros.



¡El método de Newton resolvió el problema brillantemente!, ¿verdad?

El hombre fabricó la pirámide, pero las energías no regresaban.

—¡La pirámide necesita ayuda! —le dijo el mago.

—¿Ayuda?

—Sí, ayuda.

—¿Cómo puedo ayudar a mi pirámide?

El mago consultó las cartas.

—Sería bueno —dijo—, correr todas las mañanas un kilómetro.

—¡Será fácil! —exclamó el hombre—. Puedo hacerlo, si eso ayuda a la pirámide.

Empezó a correr todas las mañanas y le gustó tanto que, dentro de poco tiempo, corría varios kilómetros al día. Se olvidó por completo de su falta de energía, pues ahora su interés era correr más y mejor. ¡Tenía suficiente energía para competir en olimpiadas!

La falta de energía se debía a que no tenía en qué gastarla.

25

El número de la mala suerte

Érase una vez una princesa que no quería casarse porque una gitana le había dicho que, entre todos los pretendientes, ella escogería a aquel que le regalaría un anillo con una estrella de 13 puntas.

—¡El número 13 es de mala suerte! —exclamó la princesa—. ¡Prefiero vivir sola que mal acompañada!

Sin embargo, su padre, el rey, convocó a todos los pretendientes a su palacio y les dijo:

—El que regale a mi hija el anillo más original, será su esposo.

Todos los pretendientes presentaron a la princesa sus anillos. Ella los saludó con respeto, pero pasó de largo hasta llegar donde se encontraba un príncipe que le ofreció un anillo con una estrella de trece puntas.

—¿Por qué me quiere regalar un número de mala suerte? —preguntó la princesa.

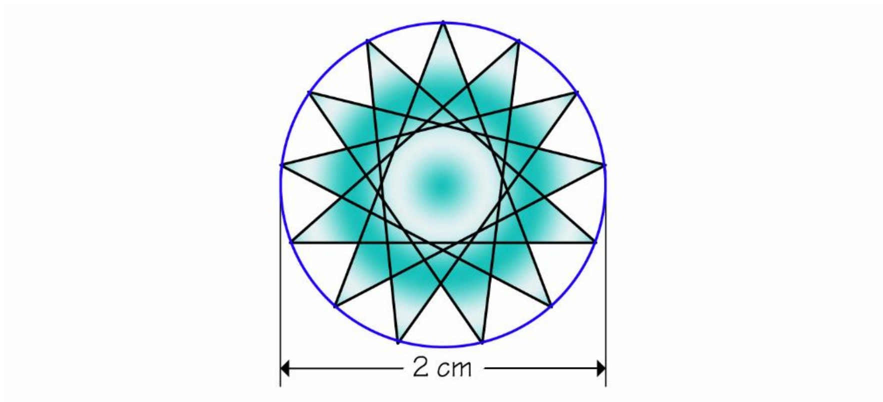
Pero, al mirar a los ojos del príncipe, sintió que estaba enamorada de él y que él era su prometido.

—Porque quiero que venzamos a la mala suerte juntos —le respondió el príncipe—. Además, yo hice este anillo con mis propias manos.

—¿Cómo? —preguntó la princesa.

Y el príncipe le dio la siguiente explicación. ¡Ayúdale a realizarla, por favor!

Para empezar, el príncipe trazó una circunferencia de radio 1 centímetro y se imaginó que la estrella ya está inscrita en ella:



Entonces llamó y al doble del coseno del ángulo central del anillo: $y = 2CosA$.
Es decir, $Cos\left(\frac{360°}{13}\right) = \frac{y}{2}$.

Como $Cos(13A) = Cos(6A + 7A)$, expresó por separado los cosenos de $6A$ y de $7A$:

$Cos(6A) = 32Cos^6A - 48Cos^4A + 18Cos^2A - 1$
$Cos(7A) = 64Cos^7A - 112Cos^5A + 56Cos^3A - 7CosA$

Para la estrella, se debe cumplir la siguiente igualdad:

$$Cos(6A) = Cos(7A)$$

¿Por qué? El príncipe igualó las dos expresiones:

$$32Cos^6A - 48Cos^4A + 18Cos^2A - 1 = 64Cos^7A - 112Cos^5A + 56Cos^3A - 7CosA$$

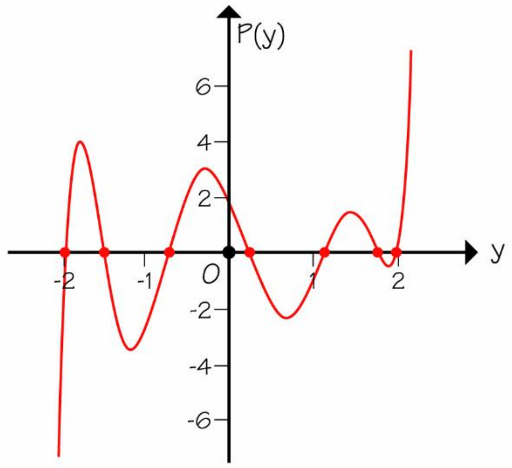
Lo escribió en términos de y:

$$64\left(\frac{y}{2}\right)^7 - 32\left(\frac{y}{2}\right)^6 A - 112\left(\frac{y}{2}\right)^5 + 48\left(\frac{y}{2}\right)^4 + 56\left(\frac{y}{2}\right) - 18\left(\frac{y}{2}\right)^2 - 7\left(\frac{y}{2}\right) + 1 = 0$$

Al simplificar, encontró el siguiente polinomio:

$$P(y) = y^7 - y^6 - 7y^5 + 6y^4 + 14y^3 - 9y^2 - 7y + 2 = 0$$

Su gráfica es la siguiente:



$P(y) = y^7 - y^6 - 7y^5 + 6y^4 + 14y^3 - 9y^7 - 7y + 2$

¡Se obtuvo una ecuación de séptimo grado! El príncipe tiene que resolverla, es decir, descubrir su raíz real que conviene para la construcción de la estrella de 13 puntas.

Es un polinomio de grado 7 y tiene 7 raíces, todas reales. 3 de ellas son negativas, y 4 positivas. Y sabes que el ángulo buscado debe estar en el intervalo entre 0° y 45° Por tanto, las raíces negativas deben ser rechazadas, porque producen ángulos mayores a 90°. Tampoco sirve la raíz $y = 2$, porque en ese punto el ángulo es igual a 0°. ¡Así que debes centrarte en las tres raíces restantes!

Como puedes ver en la gráfica, existe una raíz cercana a $y = 17$ ¡Encuéntrala! Usa el método de Newton para este propósito.

Representa a la raíz desconocida como $y_o = 17 + p$.

Si se reemplaza esta expresión en la ecuación, puedes escribir:

$$P(1.7 + p) = (1.7 + p)^7 - (1.7 + p)^6 - (1.7 + p)^5 + 6(1.7 + p)^4 + 14(1.7 + p)^3$$

$$-9(1.7 + p)^2 - 7(17 + p) + 2$$

Desarrolla los binomios:

$$p^7 + 10.9 \dots p^6 + 43.49 \dots p^5 + 75.105 \dots p^4 + 46.5635 \dots p^3 - 4.58153 \dots p^2$$

$$-6.85994 \dots p + 0.490908 \dots = 0$$

Toma en consideración solamente los términos lineales, despreciando las demás potencias. Obtendrás:

$$-6.85994 \dots p + 0.490908 \dots = 0$$

Despeja el valor de p:

$$p = \frac{-0.490908\dots}{-6.85994\dots} = 0.07156155885 \dots$$

Es decir, la raíz que estás buscando tiene un valor aproximado de

$y_0 = y + p = 1.7 + p = 1.771561559 \ldots$

Para mejorar la precisión, repite este paso al menos dos veces más.
Ya tienes

$y_0 = 1.771561559 \ldots$

Tu raíz será ahora:

$y_1 = y_0 + q = 1.771561559 + q$

Reemplaza este valor en el polinomio:

$q^7 + 11.4009 \ldots q^6 + 48.2777 \ldots q^5 + 91.5162 \ldots q^4 + 70.37 \ldots q^3 + 7.88635 \ldots q^2 - 6.68438 \ldots q - 0.00434486 \ldots = 0$

Toma en consideración solamente los términos lineales:

$-6.68438 \ldots q - 0.00434486 \ldots = 0$

Ya conoces el valor de q:

$q = -0.0006500019448 \ldots$

Es decir, la raíz que estás buscando tiene un valor aproximado de

$y_1 = y_0 + q = 1.770911557 \ldots$

Ahora, considera:

$y_2 = y_1 + r = 1.770911557 + r$

Reemplaza este valor en el polinomio:

$r^7 + 11.3964 \ldots r^6 + 48.2332 \ldots r^5 + 91.3593 \ldots r^4 + 70.1322 \ldots r^3 + 7.74936 \ldots r^2 - 6.69545 \ldots r + 0.00000330915 \ldots = 0$

Toma en consideración solamente los términos lineales:

$-6.69545 \ldots r = 0.00000330915 \ldots$

Es decir: $r = 0.0000004942386247$.

La raíz que estás buscando tiene un valor aproximado de:

$y_2 = y_1 + r = 1.1770911557 \ldots + r = 1.770916499 \ldots$

Con la ayuda de tu calculadora puedes comprobar que, en efecto, el valor del doble del coseno de $\frac{360°}{13}$ es cercano al que acabas de hallar:

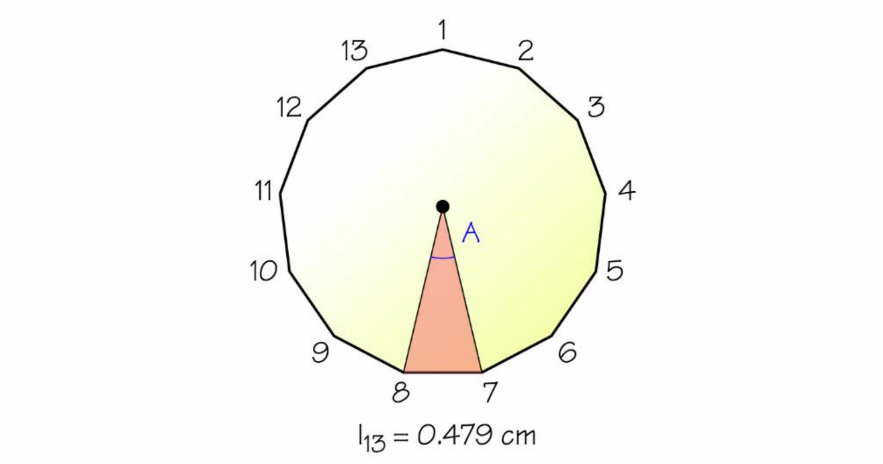
$Cos\frac{360°}{13} = 1.177091205$

Por la ley de cosenos, calcula la longitud del lado del polígono buscado:

$x = |_{13} = \sqrt{2 - 2CosA} = \sqrt{2 - y} = \sqrt{2 - 1.770916499 \ldots}$

$= 0.4786266823 \ldots cm$

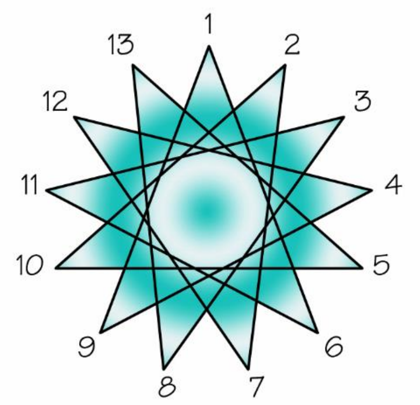
¡Ahora el príncipe puede construir el polígono de 13 lados! Enumera sus vértices:



Para obtener la estrella, une los vértices de la siguiente forma:

1, 6, 11, 3, 8 13, 5, 10, 2, 7, 12, 4, 9, 1.

Se obtiene la siguiente estrella:



Anota la respuesta del príncipe:

> **Para fabricar un anillo de radio 1 cm, con una estrella inscrita de 13 puntas, se debe trazar un polígono regular, cada uno de cuyos 13 lados mide 0.479 cm.**

¡El método de Newton resolvió el problema brillantemente!, ¿verdad?

—¡Recuerda el cuento de la Bella Durmiente! —dijo el príncipe a la princesa—. Si no invitamos al hada malvada, ella nos matará. Es mejor invitarla a nuestra boda, porque juntos podremos derrotarla.

El príncipe y la princesa se casaron un viernes trece, lograron vencer todos los obstáculos y vivieron felices muchos años.

26

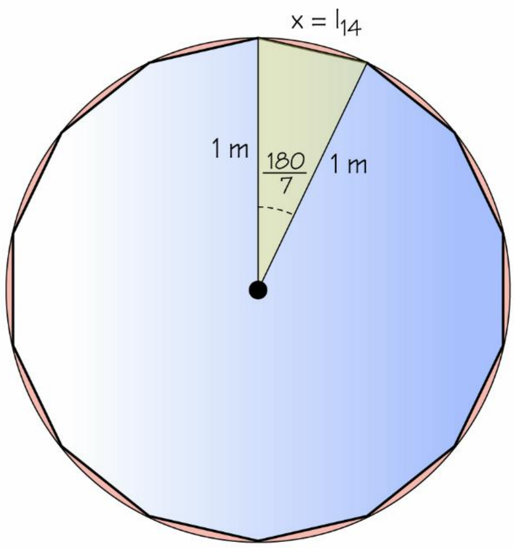
Las palabras y las cosas

Un doctor buscaba el remedio mágico para todas las enfermedades. Un mago le dijo:

—El verdadero remedio es la palabra. Observa durante dos semanas la hipnosis, que yo hago, y te convencerás.

El doctor decidió elaborar un calendario circular para los 14 días, durante los cuales iba a observar la hipnosis del mago. Sobre una cartulina grande trazó una circunferencia de radio 1 m y se puso a pensar: ¿de qué tamaño se deben trazar los lados del tetradecágono? ¡Ayúdale a averiguarlo, por favor!

Llama *x* al lado del tetradecágono:



Y llama y al doble de su coseno: $y = 2CosA$.

Expresa por separado los cosenos de $8A$ y de $6A$:

$$Cos8A = 128Cos^8A - 256Cos^6A + 160Cos^4A - 32C0s^2A + 1$$
$$Cos6A = 32Cos^6A - 48Cos^4A + 18Cos^2A - 1$$

Para el calendario del médico se debe cumplir la siguiente igualdad:

$$8A + 6A = 360°$$

Es decir:

$$8A = 360° - 6A$$

En otras palabras:

$$Cos8A = Cos(360° - 6A)$$

Aplica el coseno de la diferencia de dos ángulos:

$$Cos8A = Cos360°Cos(6A) - Sen\ 360°Sen(6A)$$

Ya lo sabes:

$$Cos(8A) = Cos(6A)$$

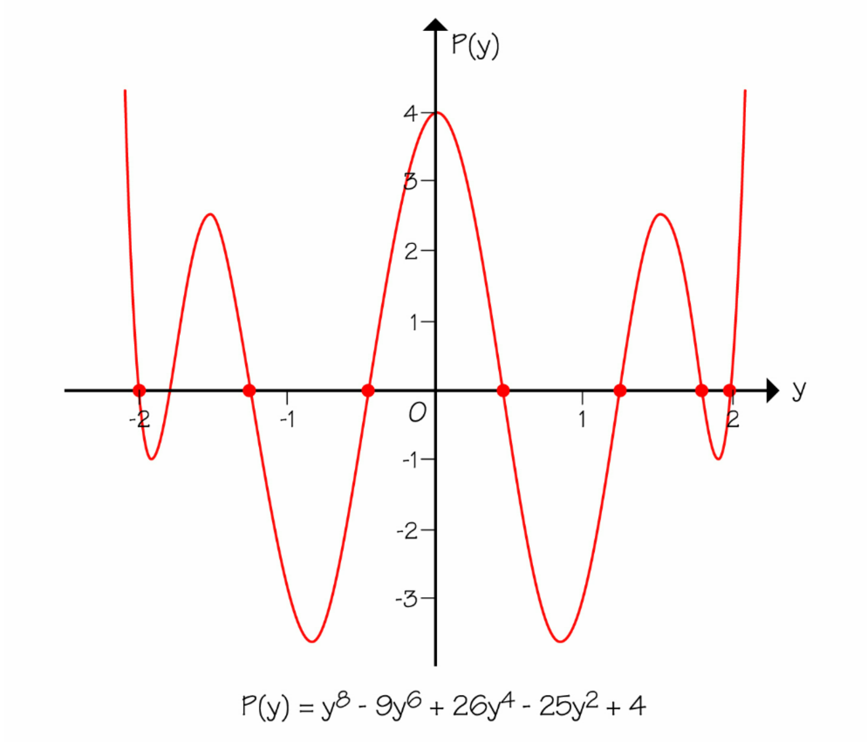
Iguala sus expresiones:

$$128\left(\frac{y}{2}\right)^8 - 256\left(\frac{y}{2}\right)^6 + 160\left(\frac{y}{2}\right)^4 - 32\left(\frac{y}{2}\right)^2 + 1 = 32(\frac{y}{2})^6 - 48\left(\frac{y}{2}\right)^4 + 18\frac{y^2}{2} - 1$$

¡Simplifica la ecuación! Se producirá el siguiente polinomio:

$$P(y) = y^8 - 9y^6 + 26y^4 - 25y^2 + 4 = 0$$

Su gráfica es la siguiente:



¡Estás frente a una ecuación de octavo grado! Necesitas descubrir su raíz real que conviene para la construcción del tetradecágono.

Es un polinomio de grado 8 y tiene 8 raíces, todas reales. 4 de ellas son negativas, y 4 positivas. Y sabes que el ángulo buscado para construir el tetradecágono debe estar en el intervalo entre 0° y 45°. Por tanto, las raíces negativas deben ser rechazadas, porque producen ángulos mayores a 90° Tampoco sirve la raíz $y = 2$, porque en ese punto el ángulo es igual a 0°. ¡Así que debes centrarte en las tres raíces restantes!

Como puedes ver en la gráfica, existe una raíz cercana a 1.8. ¡Encuéntrala! Usa el método de Newton para este propósito.

Representa a la raíz desconocida como

$$y_0 = 1.8 + p$$

Reemplazando esta expresión en la ecuación, puedes escribir:

Desarrolla los binomios tomando en consideración solamente los términos lineales, despreciando las demás potencias. Como resultado obtendrás:

$$-14.0626944 \cdot p + 0.02718976 = 0$$

Despeja el valor de p:

$$p = 0.001933467316$$

Es decir, la raíz que estás buscando tiene un valor aproximado de

$$y_0 = 1.8 + p = 1.801933467$$

Para mejorar la precisión, repite este proceso dos veces más. Sabrás que

$$y_1 = y_0 + q = 1.801933467 + 4.268783040 \cdot 10^{-6} = 1.801937735$$

Y que:

$$y_2 = y_1 + r = 1.801937735 + r = 1.801937735 + r = 8.04382528 \cdot 10^{-10} = 1.801937735 \ldots$$

Con la ayuda de tu calculadora puedes comprobar que, en efecto, el valor del doble del coseno del ángulo de $\frac{360°}{14}$ es el que acabas de hallar:

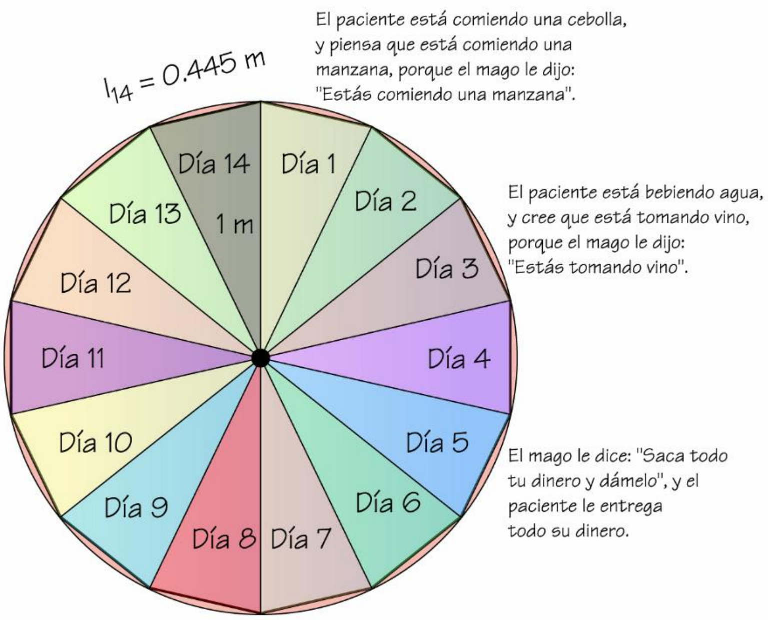
$$2Cos\left(\frac{360°}{14}\right) = 1.801937735$$

Por la ley de los cosenos, encuentra la longitud del lado del tetradecágono:

$$l_{14} = \sqrt{1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot Cos\left(\frac{180°}{7}\right)} = 0.4450418679 \ldots m$$

¡Ahora el doctor puede construir el polígono de 14! Anota tu respuesta:

> **El lado del polígono de 14 lados, inscrito en una circunferencia de radio 1 m, debe medir 0.445 metros.**



¡El método de Newton resolvió el problema brillantemente!, ¿verdad?

El doctor observaba la hipnosis y, asombrado, anotaba en su calendario:

- El paciente está comiendo una cebolla y piensa que está comiendo una manzana, porque el mago le dijo: “Estás comiendo una manzana”.
- El paciente está bebiendo agua y cree que está tomando vino, porque el mago le dijo: “Estás tomando vino”.
- El mago le dice: “Saca todo tu dinero y dámelo” y el paciente le entrega todo su dinero.

—¡Ya entiendo! —exclamó el doctor—. ¡La palabra *manzana* es más poderosa que la manzana! ¡La palabra *vino* es más poderosa que el vino! ¡La palabra *dinero* es más poderosa que el dinero!

Y empezó a estudiar de qué modo se puede usar la palabra para la curación de las enfermedades.

Generalmente creemos que las cosas producen las palabras. Es exactamente al revés: ¡las palabras producen las cosas!

27

El polígono de 17 lados

Carl Gauss se sentía intrigado: "¿Por qué Euclides nunca intentó construir el polígono regular de 17 lados con regla y compás? ¡No hay ninguna indicación sobre ello en los *Elementos*! Me parece que pensaba que solo los polígonos de 3, 4, 5, 6 y 15 lados, y sus respectivos productos con una potencia de 2, son construibles con regla y compás".

La construcción de polígonos regulares interesó a Gauss desde entonces. En el año 1796 (cuando solo tenía 19 años), Gauss descubrió que...

¡El polígono regular de 17 lados sí es construible con regla y compás!

¿Cómo lo hizo? Demostró que el doble del coseno del ángulo $\frac{360°}{17}$ es la raíz más grande entre las dos raíces positivas del polinomio:

$$y^2 - \frac{1}{4}\left(\sqrt{17} - 1 + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}\right)y + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{4}\sqrt{17} - 1 + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}\right)\right)^2$$
$$-\frac{1}{2}(\sqrt{17} - 1) + \frac{1}{4}\left(\sqrt{17} - 1 + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}\right) - 4 = 0$$

Y, como todas las raíces involucradas en los coeficientes de este polinomio son raíces cuadradas, ¡es posible construirla con regla y compás!

Existe una anécdota respecto de este descubrimiento. Un día Gauss se acercó a su profesor Kästner de la universidad de Göttingen, y le dijo:

—He demostrado que el heptadecágono es construible con regla y compás.

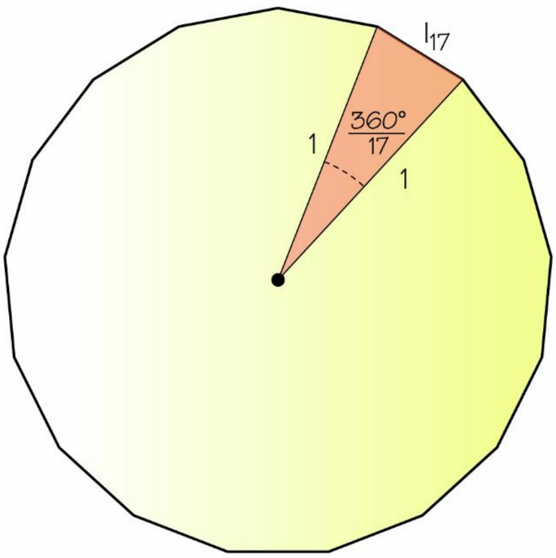
—¡Oh, tal construcción carece de importancia, ya que muchas construcciones prácticas son conocidas! —contestó Kästner.

—Usted no comprende —dijo Gauss—. No encontré una nueva construcción aproximada, sino una construcción exacta con regla y compás.
—¡Pero el heptádecágono no es construible con regla y compás! —objetó Kästner.
—¡He demostrado que sí! —insistió Gauss—. ¡He demostrado que el heptadecágono es construible con regla y compás! He reducido una ecuación algebraica de grado 17 a una ecuación de menor grado.
—¡Eso es imposible!
—¡En verdad, lo hice!
—¡Oh, está bien! —se burló Kästner—. Cuando yo era joven, también creí que lo había logrado.
Más tarde Gauss se vengó de Kästner, quien también se enorgullecía de su poesía, diciendo:
—Kästner es el mejor poeta entre los matemáticos y el mejor matemático entre los poetas.

La demostración de Gauss es bastante complicada; sin embargo, es fácil conocer el valor aproximado de la longitud del lado del heptadecágono. ¡Hazlo por el método de Newton!
Traza una circunferencia de radio 1 unidad (por ejemplo, de 1 decímetro). Ahora tienes que determinar: ¿de qué tamaño deberás trazar los lados del polígono regular de 17 lados? ¡Intenta averiguarlo!

Llama x el lado del polígono regular de 17 lados, y llama y al doble del coseno del ángulo $\frac{360°}{17}$:

$$y = 2Cos\frac{360°}{17}$$



Entonces, $\frac{y}{2} = Cos\frac{360°}{17}$. La trigonometría te informa que:

$$Cos8A = 128Cos^8A - 256Cos^6A + 160Cos^4A - 32Cos^2A + 1$$
$$Cos9A = 256Cos^9A - 576Cos^7A + 432Cos^5A - 120Cos^3A + 9CosA$$

Para tu caso, se tiene que $8A + 9A = 360°$.
Como $8A = 360 - 9A$, calcula el coseno de ambos lados:

$$Cos(8A) = Cos(360 - 9A)$$

De aquí, deduces fácilmente que:

$$Cos(8A) = Cos360 \cdot Cos(9A) - SEn360 \cdot Sen(9A)$$

Es decir:

$$Cos(8A) = 1 \cdot Cos9A - 0 \cdot Sen(9A)$$

Por lo tanto:

$$\mathrm{Cos}(8A) = Cos(9A)$$

Si se reemplazan los datos, obtienes la siguiente ecuación:

$$128Cos^8A - 256Cos^6A + 160Cos^4A - 32Cos^2A + 1 =$$
$$256Cos^9A - 576Cos^7A + 432Cos^5A - 120Cos^3A + 9CosA$$

Expresa esto en términos de la incógnita y:

$$256\left(\frac{y}{2}\right)^9 - 128\left(\frac{y}{2}\right)^8 - 576\left(\frac{y}{2}\right)^7 + 256\left(\frac{y}{2}\right)^6 + 432\left(\frac{y}{2}\right)^6 + 432\left(\frac{y}{2}\right)^5 - 160\left(\frac{y}{2}\right)^4$$
$$-120\left(\frac{y}{2}\right)^3 + 32\left(\frac{y}{2}\right)^2 + 9\left(\frac{y}{2}\right) - 1 = 0$$

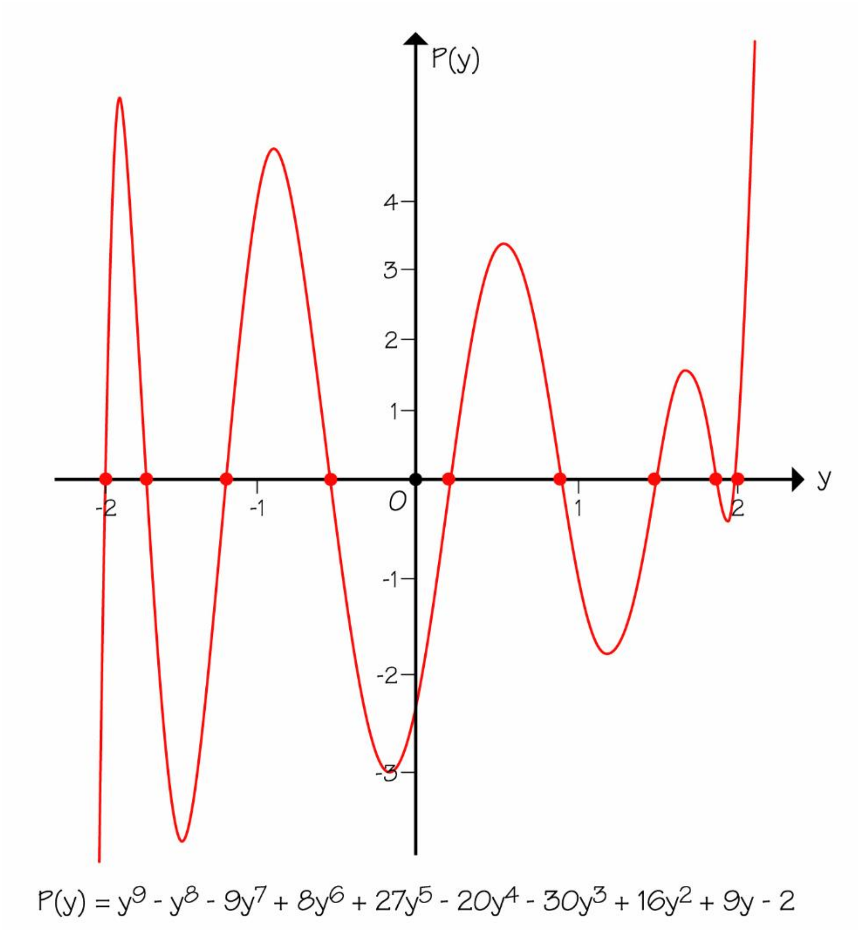
Ejecuta las operaciones:

$$y^9 - y^8 - 9y^7 + 8y^6 + 27y^5 - 20y^4 - 30y^3 + 16y^2 + 9y - 2 = 0$$

¡Has obtenido un polinomio de noveno grado!

$$P(y) = y^9 - y^8 - 9y^7 + 8y^6 + 27y^5 - 20y^4 - 30y^3 + 16y^2 + 9y - 2 = 0$$

Su grafica es la siguiente:



Te muestra las 9 raíces que tiene el polinomio.

Descarta las primeras cuatro raíces por ser negativas. Y también descarta la última raíz que es igual a 2, pues con ella obtienes el ángulo nulo. Como puedes ver en la gráfica, existe una raíz cercana a $y = 1.9$. ¡Encuéntrala! Usa el método de Newton para este propósito.

Representa a la raíz desconocida como:

$$y_0 = 1.9 + p$$

Reemplaza y_0 en el polinomio $P(y)$:

$$P(1.9+p) = (1.9+p)^9 - (1.9+p)^8 - 9(1.9+p)^7 + 8(1.9+p)^6 + 27(1.9+p)^5$$
$$-20(1.9+p)^4 - 30(1.9+p)^3 + 16(1.9+p)^2 + 9(1.9+p) - 2$$

Iguala a cero el valor de este polinomio:

$$27(1.9+p)^5 - (1.9+p)^9 - (1.9+p)^8 - 9(1.9+p)^7 + 27(1.9+p)^5$$
$$-20(1.9+p)^4 - 30(1.9+p)^3 + 16(1.9+p)^2 + 9(1.9+p) - 2 = 0$$

Al expandir las potencias, obtendrás:

$p^9 + 16.1 \cdot p^8 + 505.76p^7 + 363.376p^6 + 693.851p^5 + 716.753p^4 +$
$350.267p^3 + 48.4085p^2 - 6.4262p - 0.27072 = 0$

El método de Newton descarta los términos de grado mayos que 1, por tanto, solo te queda:

$-64262p - 0.27072 = 0$

Ya lo sabes:

$p = 0.04212754038$ ...

Como $y_0 = 1.9 + p$, se produjo lo siguiente:

$y_0 = 1.9 - 0.04212754038 = 1.85787246$

Ahora, toma $y_1 = y_0 + q$; es decir, $y_1 = 1.85787246 + q$.

Reemplaza y_1 en el polinomio $P(y)$:

$P(y) = (1.85787246 + q)^9 - (1.85787246 + q)^8 - 9(1.85787246 + q)^7$
$+8(1.85787246 + q)^6 + 27(1.85787246 + q)^5 - 20(1.85787246 + q)^4$
$-30(1.85787246 + q)^3 + 16(1.85787246 + q)^2 + 9(1.85787246 + q) - 2$

Al igualar a cero este valor, se produce:

$q^9 + 15.7209q^8 \mp 100.398q^7 + 332.982q^6 + 605.876q^5 + 580.002q^4$
$+241.269q^3 + 11.2712q^2 + 8.84368q + 0.061892 = 0$

Descarta los términos de grado mayor que 1:

$-8.84368q + 0.061892 = 0$

Halla el valor de q:

$q = 0.00699844087$ ...

Como $y_1 = y_0 + q$, encontrarás que $y_1 = 1.864870904$ ...
Por lo tanto, $y_1 = 1.864870904$ ...

Ahora toma $y_2 = y_1 + r$; en otras palabras: $y_2 = 1.864870904 + r$.

Reemplaza y^2 en el polinomo $P(y)$:

$$P(1.86+r) = (1.864870904+r)^9 - (1.864870904+r)^8 - 9(1.864870904+r)^7$$
$$+8(1.864870904+r)^6 + 27(1.864870904+r)^5 - 20(1.864870904+r)^4$$
$$-30(1.864870904+r)^3 + 16(1.864870904+r)^2 + 9(1.864870904+r) - 2$$

Luego de igualar a cero este valor, obtienes:

$$r^9 + 15.7838r^8 + 101.28r^7 + 337.922r^6 + 6.19.962r^5 + 601.449r^4 257.805r^3$$
$$+16.5092r^2 - 8.64967r + 0.000636135 = 0$$

Elimina los términos de grado mayor que 1:

$$-8.64967r + 0.000636135 = 0$$

Ya lo sabes:

$r = 0.00007354442424$ ...

Como $y_2 = y_1 + r$, tenemos:

$$y_2 = 1.864870904 + 0.00007354442424$$

Ya conoces la tercera aproximación de la incógnita *y*:

$y_2 = 1.864944448$ ...

Si continúas así, obtendrás la raíz y_8:

$y_8 = 1.864944459$ ...

¡Pide ayuda a tu calculadora! Ella te indicará que: $Cos\frac{360°}{17} = 0.9324722294$. Como $\frac{y}{2} = Cos\frac{360°}{17}$, la raíz que calculaste, y_8, satisface esta igualdad plenamente:

$\frac{1.864944459}{2} = 0.9324722294$ ...

¡Estás listo para calcular el lado x del polígono regular de 17 lados!
Con este propósito utiliza la ley de los cosenos:

$$x^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot Cos\frac{360°}{17}$$

Despeja la incógnita:

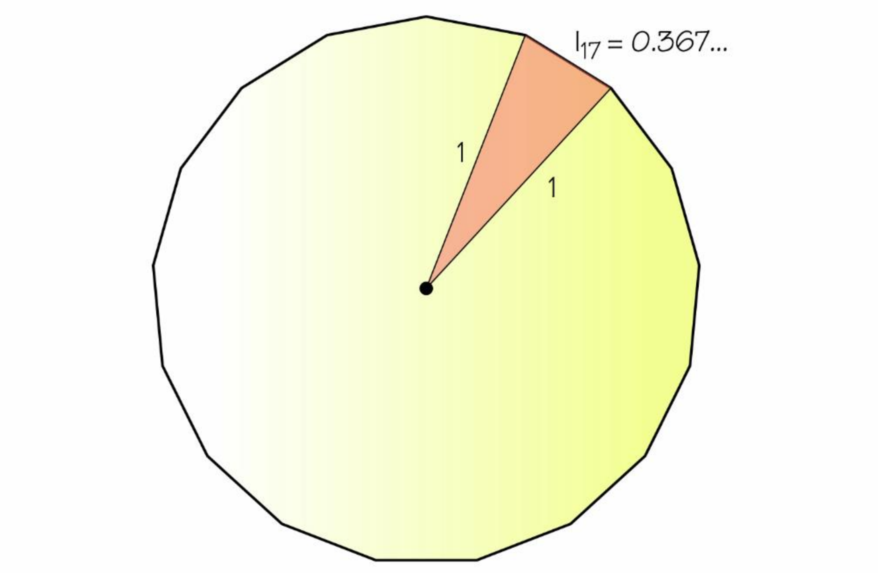
$$|_{17} = x = \sqrt{2 - 2Cos\frac{360°}{17}}$$

Es decir,

$$|_{17} = x = 0.3674990356\ldots$$

¡Has logrado descubrir la medida del lado del heptadecágono! Anota tu respuesta:

El lado del heptadecágono, inscrito dentro de una circunferencia de radio 1, debe medir 0.367 radios.



¡El método de Newton resolvió el problema brillantemente!, ¿verdad?

Gauss se sentía tan orgulloso de su descubrimiento, que hizo esta petición:
—Quiero que en mi lápida sepulcral se esculpa un polígono regular de 17 lados.
Y, aunque aquello no fue cumplido, dicho polígono sí se halla en el monumento erigido a Gauss en su lugar de nacimiento, en la ciudad de Brunswick.

28

El reloj de arena

Dajar y Alejandra son novios. Como regalo de bodas Dajar decidió entregar a su amada un reloj de arena. Para su fabricación halló una arena especialmente tratada, de modo que el tamaño de sus granos era muy uniforme. Para asegurar que el conducto por donde tenía que pasar la arena sea muy liso, encontró un vidrio de calidad alta, en el cual no existían deformidades.

—Puedo estar seguro que la arena, al verterse por el agujero, tendrá un flujo constante —se dijo Dajar, muy contento—. ¡Tal flujo será independiente del volumen superior de la arena! Es decir, si el recipiente de arriba está lleno o casi vacío, la cantidad de arena que atravesará el agujero por segundo será prácticamente la misma.

Y escribió la ecuación de flujo de la arena:

$$q = k\delta\sqrt{g}A^{\frac{5}{4}}$$

Aquí:

- q representa el flujo de arena en gramos por segundo $\frac{g}{s}$.
- k es la constante del tipo de arena. En el caso de Dajar, $k = 0.5$.
- δ es la densidad de la arena en gramos por centímetro cúbico. En el caso de Dajar, $\delta = 2.5\frac{g}{cm^3}$.
- g es la aceleración de la gravedad: $g = 98\frac{cm}{s^2}$.
- A es el área del conducto en centímetros cuadrados (cm^2).

Dajar también conoce la relación entre la masa y la densidad $\delta = \frac{m}{V}$:
Donde, m es la masa de arena en gramos (g)y V es el volumen total de la arena en centímetros cúbicos (cm^3).

Dajar desea que el reloj mida una hora exacta. Por tal motivo el vidriero colocó 1250 gramos de arena, pues es el tiempo que se demora en vaciarse el recipiente de arriba con la arena de esta especie. Para que el reloj mida una hora, Dajar calcula el flujo de arena:

$$q = \frac{1250g}{3600s} = 0.347222\frac{g}{s}$$

Despeja el área de la ecuación del flujo:

$$A = \left(\frac{q}{k\delta\sqrt{9}}\right)^{\frac{4}{5}} = \left(\frac{0.347222}{0.5 \cdot 2.5 \cdot \sqrt{98}}\right)^{\frac{4}{3}} = 0.0573412cm^2$$

—Por otra parte —se dijo Dajar—, el orificio deber tener un radio mínimo de 0.1 cm, debido a que, con un radio más pequeño, el vidrio no puede fluir en el momento del soplado.

Para calcular el radio necesario del agujero, recordó que

$$A = \pi r^2$$

Mediante esta fórmula, encontró el radio:

$$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = \sqrt{\frac{0.0573412}{3.141592}} = 0.1351cm$$

—¡Como se puede ver —se dijo—, el radio es mayor al mínimo requerido!

Dajar se pregunta:

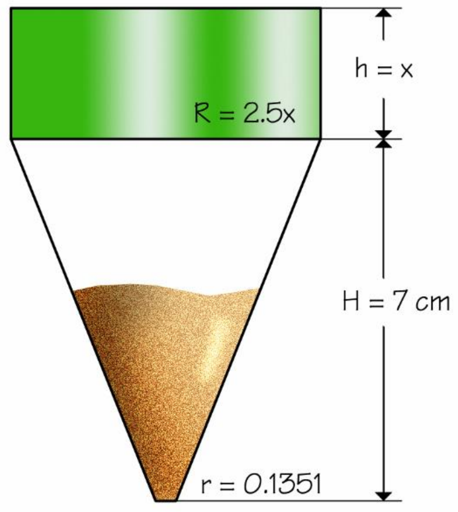
—¿Qué volumen ocuparán los 1250 gramos de arena?

De la ecuación del volumen obtiene:

$$V = \frac{m}{\delta} = \frac{1250}{2.5} = 500cm^3$$

Para que las medidas del cilindro sean estéticamente hermosas, el vidriero le recomendó que el radio del cilindro sea 2.5 veces mayor que su altura.

—Y también le aconsejo que la altura del cono truncado sea de 7 centímetros —dijo—, para que la arena fluya correctamente.



Dajar se da cuenta que el volumen total de la parte superior del reloj, que es un cilindro, y de la parte inferior, que es un cono truncado, se puede calcular por la siguiente formula:

$$V_T = \pi \frac{1}{3} H \cdot (R^2 + r^2 + Rr) + \pi R^2 h$$

Llama *x* a la altura h.

—¡Ya puedo expresar el volumen total de mi reloj en términos de la incógnita *x*! —exclamó Dajar.

Y reemplazó los datos:

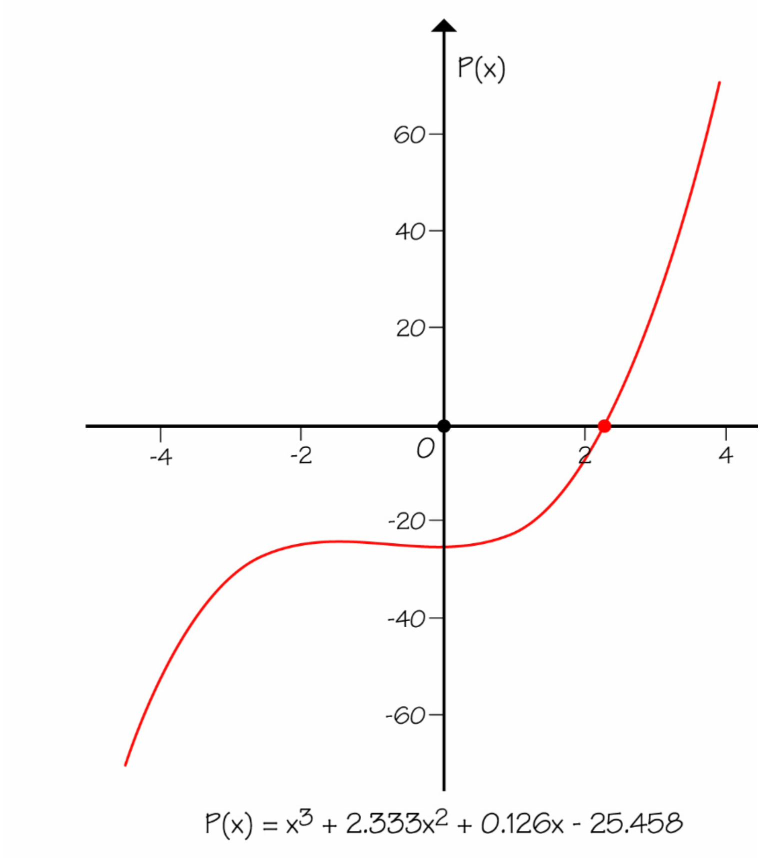
$$500 = \pi \frac{1}{3} 7 \cdot ((2.5x)^2 + 0.135101^2 + 2.5x \cdot 0.135101 + \pi x (2.5x)^2)$$

Dajar realiza las operaciones aritméticas correspondientes, obteniendo la siguiente ecuación cúbica:

$$P(x) = x^3 + 2.333333x^2 + 0.126094x - 25.457977 = 0$$

¡Hay que resolverla!

Para ello, Dajar procede a graficar el polinomio *P*(*x*):



¿Cómo encontrar la raíz de este polinomio?

Dajar había escuchado que, en su publicación del año 1817, Bernhard Bolzano intentó demostrar que, si un polinomio es negativo para *x*=*a* y positivo para *x*=*b*, necesariamente el polinomio tiene un cero entre *a* y *b*. Aunque su demostración fue un tanto oscura, la idea encantó a todos los matemáticos. Se la llamó *el método de intervalos encajados*.

Es más sencillo que el método de Newton y, en los años sesenta del siglo XIX, Karl Weierstrass lo usó, con el debido tributo a Bolzano, para calcular los números algebraicos. Para encontrar la raíz del polinomio del reloj de arena con tres cifras decimales, Dajar decide utilizar el método de intervalos encajados.

Mirando el gráfico, Dajar se da cuenta que la raíz del polinomio se encuentra tiene entre 2 y 3. Para conocer su primera cifra decimal, Dajar calcula los valores del polinomio con un intervalo de 0.1:

$$p(2) = 2^3 + 2.33333 \cdot 2^2 + 0.12609 \cdot 2 - 25.45797 = -7.87245$$
$$p(2.1) = 2.1^3 + 2.33333 \cdot 2.1^2 + 0.12609 \cdot 2.1 - 25.45797 = -5.64218$$
$$p(2.2) = 2.2^3 + 2.33333 \cdot 2.2^2 + 0.12609 \cdot 2.2 - 25.45797 = -3.23924$$
$$p(2.3) = 2.3^3 + 2.33333 \cdot 2.3^2 + 0.12609 \cdot 2.3 - 25.45797 = -0.65763$$
$$p(2.4) = 2.4^3 + 2.33333 \cdot 2.4^2 + 0.12609 \cdot 2.4 - 25.45797 = -2.10865$$

Como el polinomio cambia de signo entre 2.3 y 2.4, la primera aproximación a la raíz es 2.3.

Dajar también desea conocer la segunda cifra decimal de la incógnita. Calcula los valores del polinomio empezando con 2.31, con un intervalo de 0.01. Encuentra que el polinomio cambia de signo entre 2.32 y 2.33:

$p(2.32) = 2.32^3 + 2.33 \cdot 2.32^2 + 0.12 \cdot 2.32 - 25.45 = -1193$
$p(2.33) = 2.33^3 + 2.33 \cdot 2.33^2 + 0.12 \cdot 2.33 - 25.45 = -01526$

¡La segunda aproximación es 2.32!

Por último, Dajar quiere conocer la tercera cifra decimal de la altura x. Calcula los valores del polinomio empezando con 2.321, con un intervalo de 0.001. Encuentra que el polinomio cambia de signo entre 2.324 y 2.325:

$p(2.324) = 2.324^3 + 2.33 \cdot 2.324^2 + 0.12 \cdot 2.324 - 25.45 = -0.01007$
$p(2.325) = 2.325^3 + 2.33 \cdot 2.325^2 + 0.12 \cdot 2.325 - 25.45 = -0.0163$

¡La tercera aproximación es 2.324 centímetros!

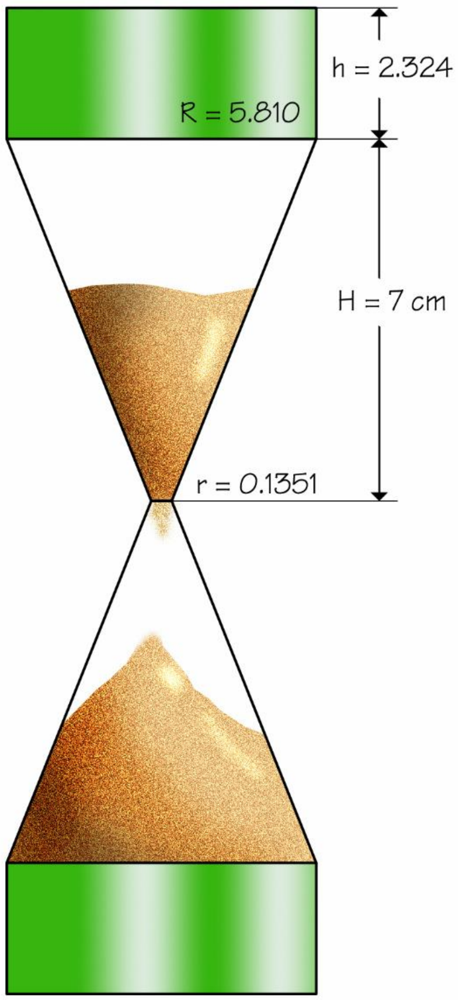
—¡Ya conozco todas las medidas de mi reloj! —exclama Dajar—. Pues ya sé que el radio del cilindro debe medir 5.810 centímetros.

En efecto:

$R = 2.5x = 2.5 \cdot 2.324 = 5.810cm$

Anota la respuesta de Dajar:

Para que los 1250 gramos de arena se escurran en una hora, el reloj debe tener un radio menor de 0.135 cm, el radio mayor de 5.810 cm, la altura del cono de 7cm, y la altura del cilindro de 2.324 cm.



¡El método de intervalos encajados resolvió el problema exitosamente!, ¿verdad?

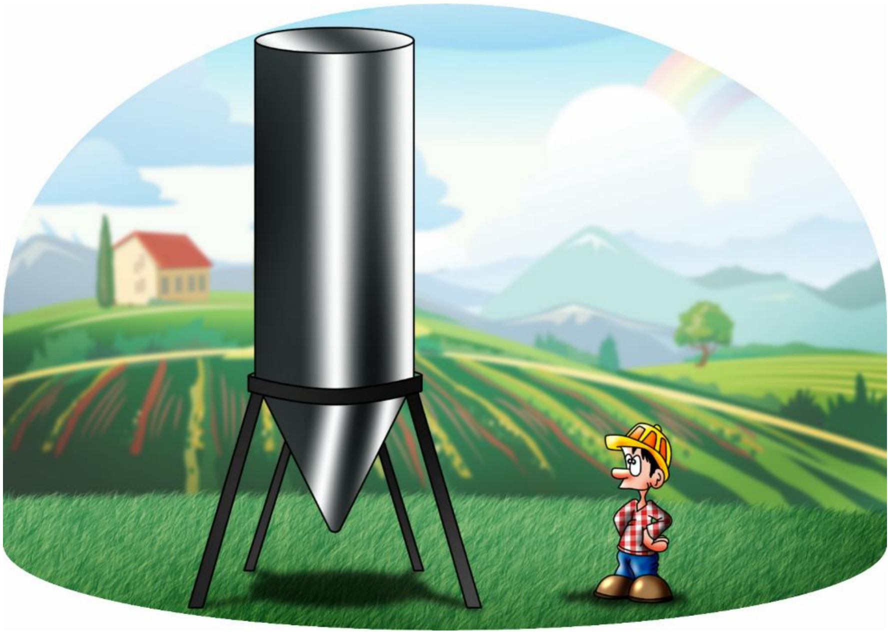
—¿Por qué me regalaste un reloj de arena? —preguntó Alejandra a Dajar—. Hay muchos tipos de relojes modernos y no tendrías que molestarte en fabricarlo.

—Me gustó hacerlo personalmente —contestó Dajar—. Me sentí contigo segundo a segundo. Y creo que, al mirar a la arena escurrirse por el agujero, nos ayudará a comprender que el tiempo fluye de la misma manera y nos abandona. Así recordaremos que la vida es corta y no la gastaremos en disgustos y peleas, sino que viviremos en paz y armonía.

El tiempo se escapa como la arena entre los dedos. ¡Pero aquel que mira el tiempo, con respeto, es eterno! El tiempo no puede mirar al tiempo: solo la Eternidad puede mirar al tiempo. Y solo en la Eternidad podemos vivir en paz y armonía. En el tiempo no podemos hacerlo, es imposible. ¿Quién puede sentirse feliz viendo como su vida se le escapa segundo a segundo?

¡No eres la arena movediza del tiempo, eres la estructura cristalizada e inmóvil que la sostiene! ¡Eres el Ser Eterno!

Tal es el mensaje que nos entrega cada reloj de arena.

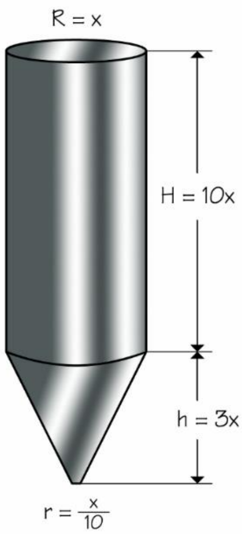


29

El silo espiritual

Un arquitecto está diseñando un silo para almacenar trigo. Decide que tendrá un volumen de 24 metros cúbicos; que el radio de la salida del grano será 10 veces menor que el radio del ingreso; que la altura de la parte cilíndrica será igual a 10 radios de ingreso, y la altura de la parte cónica a 3 radios. El arquitecto se pregunta: ¿qué dimensiones deberá tener el silo? ¡Ayúdale a averiguarlo, por favor!

Como puedes observar, el silo está formado por un cilindro y un cono truncado. Llama x al radio del cilindro:



Entonces, el volumen total que debe almacenar el silo será el siguiente:

$$V_{silo} = \pi R^2 H + \frac{\pi h(R^2+r^2+Rr)}{3}$$

Reemplaza los datos:

$$24 = \pi x^2 \cdot 10x + \frac{\pi \cdot 3x\left[x^2+\left(\frac{x}{10}\right)^2+x^2\left(\frac{x}{10}\right)\right]}{3}$$

Si realizas las operaciones, sabrás que:

$$24 = 11\pi x^3 + \frac{\pi x^3}{100} + \frac{\pi x^4}{10}$$

En otras palabras:

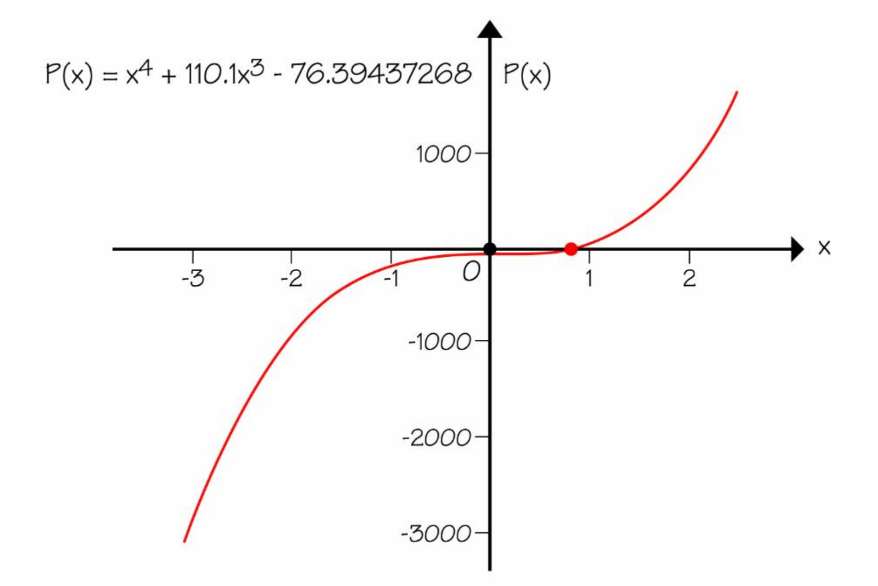
$$10\pi x^4 + 1101\pi x^3 - 2400 = 0$$

Divide ambas partes de esta ecuación para 10π. De este modo se producirá la siguiente ecuación de cuarto grado:

$$x^4 + 110 \cdot 1x^3 - 76.39437268 = 0$$

¡Solo tienes que resolverla!

Para ello realiza un gráfico del polinomio *P*(*x*):



Como podrás notar, el valor de la raíz positiva se acerca por la izquierda a 1. Para conseguir una mayor exactitud, ¡ayúdate con el método de Bolzano-Weierstrass de intervalos encajados!

Con seguridad puedes afirmar que $x \in (0.5,1)$.

Para conocer la primera cifra decimal de la raíz, calcula los valores del polinomio con un intervalo de 0.1 y observa dónde se produce el cambio de signo:

$P(0.8) = 0.8^4 + 110.1 \cdot 0.8^3 - 76.39437268 = -19.61357268$
$P(0.9) = 0.9^4 + 110.1 \cdot 0.9^3 - 76.39437268 = -4.52462732$

¡El cambio de signo se produjo entre 0.8 y 0.9! Entonces, puedes asegurar que la raíz pertenece al intervalo (0.8,0.9). Es decir, su primera cifra decimal es 8:

$x = 0.8 \ldots$

Descubre la segunda cifra decimal de la incógnita. Para ello calcula los valores del polinomio empezando con 0.81, con un intervalo de 0.01. Encontrarás que el polinomio cambia de signo entre 0.88 y 0.89:

$P(0.88) = 0.88^4 + 110.1 \cdot 0.88^3 - 76.39437268 = -0.76461012$
$P(0.89) = 0.89^4 + 110.1 \cdot 0.89^3 - 76.39437268 = 1.85013663$

Puedes asegurar que la raíz pertenece al intervalo (0.88,0.89). Es decir, su segunda cifra decimal también es 8:

$x = 0.88 \ldots$
Por último, halla la tercera cifra decimal de la incógnita. Para ello calcula los valores del polinomio empezando con 0.881, con un intervalo de 0.001. Encontrarás que el polinomio cambia de signo entre 0.882 y 0.883:

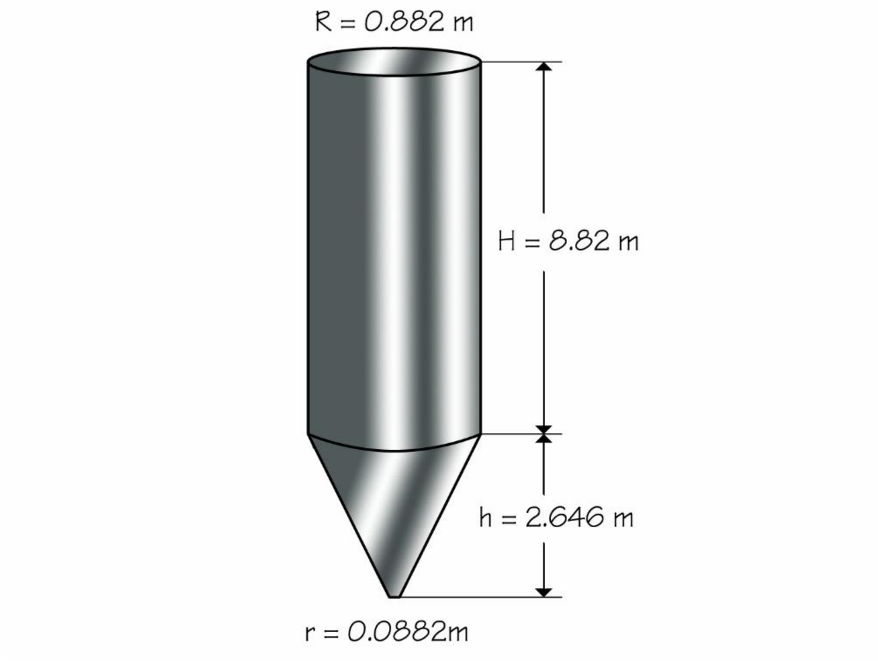
$P(0.882) = 0.882^4 + 110.1 \cdot 0.882^3 - 76.39437268 = -0.246407553$
$P(0.883) = 0.883^4 + 110.1 \cdot 0.883^3 - 76.39437268 = -0.013581365$

¡Puedes asegurar que la raíz pertenece al intervalo (0.882,0.883)! Es decir, su tercera cifra decimal es 2:

$x = 0.882 \ldots m$

Anota tu respuesta:

Para que el silo pueda almacenar 24 metros cúbicos de trigo, su radio superior debe medir 0.882 metros, y su radio inferior 0.0882 metros. La altura de la parte cilíndrica debe medir 8.82 metros, y la altura de la parte cónica, 2.646 metros.



¡El método de intervalos encajados resolvió el problema brillantemente!, ¿no es así?

Mientras realizaba el diseño, el arquitecto escuchó una tenue voz:
—Las personas solo usan la comida material, pero el verdadero alimento es espiritual.

Mahoma dijo:

Paso la noche en la presencia de mi Señor, que me da comida y bebida.

Rumi dice:

¡El ayuno es la comida de Dios!

El silo, que todos necesitamos más que el pan, es el alimento espiritual.

30

El girasol de oro

Una pareja preguntó al Maestro:

—¿Cómo podemos conservar nuestro amor?

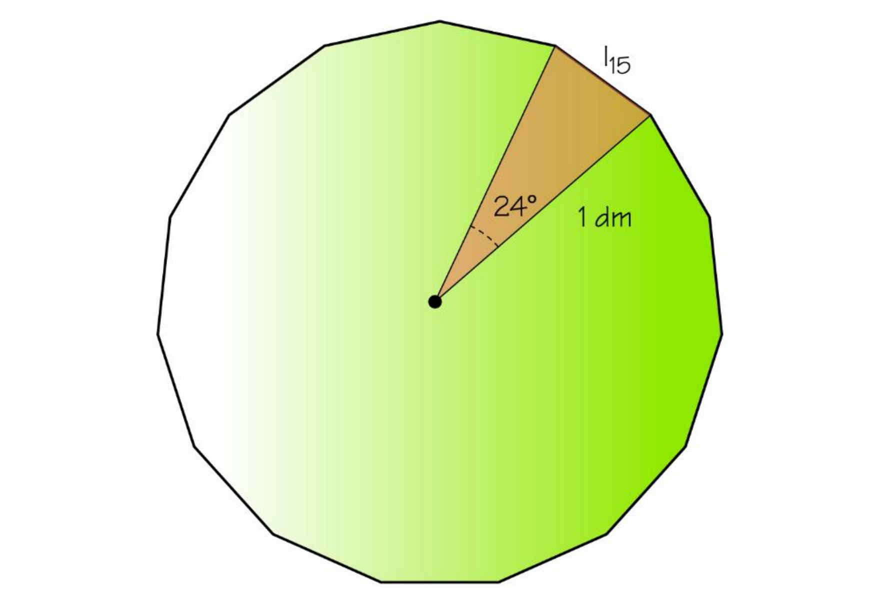
El Maestro contestó:

—Vivan ambos en función de algo mayor que sus personalidades.

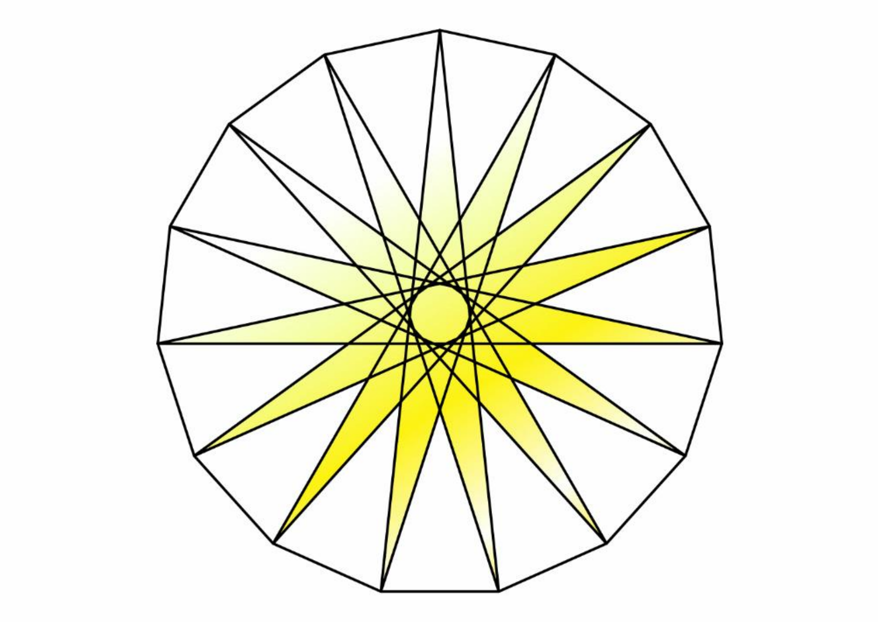
Y les llevó a un campo de girasoles.

—¡Mírenlos! —les dijo—. Cada uno mira en la misma dirección, en la dirección del sol. Ninguno se mira a sí mismo, todos miran al mismo sol.

Al regreso a casa, el novio decidió regalar a su amada un girasol de oro. Trazó una circunferencia de 1 decímetro de radio, hizo unos cálculos, e inscribió en la circunferencia el polígono regular de 15 lados:



Realizó dos trazos desde cada vértice hacia los extremos opuestos, de la siguiente forma:



¡El diseño del girasol de oro está listo! ¿Cómo supo el novio, de qué tamaño había que trazar los lados del pentadecágono? ¡Intenta descubrirlo!

El novio llama *A* al ángulo central del girasol, e y al doble de su coseno:

$$y = 2CosA = 2Cos\left(\frac{360°}{15}\right) = Cos24°$$

Es decir, $Cos24° = \frac{y}{2}$. Como $Cos(15A) = Cos(7A + 8A)$, afirma que los cosenos de los ángulos $7A$ y $8A$ son iguales. ¿Por qué? Por los conocimientos de la trigonometría, se puede escribir:

$$Cos7A = 64Cos^7A - 112Cos^5A + 56Cos^3A - 7CosA$$
$$Cos8A = 128Cos^8A - 256Cos^6A + 160Cos^4A - 32Cos^2A + 1$$

Al igualar los cosenos, obtiene:

$$64Cos^7A - 112Cos^5A + 56Cos^3A - 7CosA = 128Cos^8A - 256Cos^6A + 160Cos^4A - 32Cos^2A + 1$$

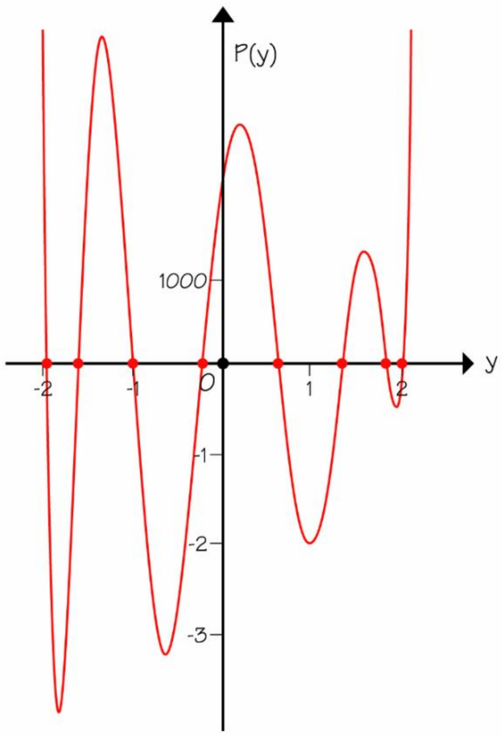
Lo escribe en términos de y:

$$64\left(\frac{y}{2}\right)^7 - 112\left(\frac{y}{2}\right)^5 + 56\left(\frac{y}{2}\right)^3 - 7\left(\frac{y}{2}\right) = 128\left(\frac{y}{2}\right)^8 - 256\left(\frac{y}{2}\right)^6 + 160\left(\frac{y}{2}\right)^4 - 32\left(\frac{y}{2}\right)^2 + 1$$

Luego de ejecutar las operaciones, se produce el siguiente polinomio:

$$P(y) = y^8 - y^7 - 8y^6 + 7y^5 + 20y^4 - 14y^3 - 16y^2 + 7y + 2 = 0$$

¡Se obtuvo una ecuación de octavo grado! Su gráfica es la siguiente:



$P(y) = y^8 - y^7 - 8y^6 + 7y^5 + 20y^4 - 14y^3 - 16y^2 + 7y + 2$

Es un polinomio de grado 8 y tiene 8 raíces, todas reales. 4 de ellas son negativas, y 4 positivas. Y sabes que el ángulo buscado para construir el girasol de oro debe estar en el intervalo entre 0° y 45°. Por tanto, las raíces negativas deben ser rechazadas, porque producen ángulos mayores a 90°. Tampoco sirve la raíz y = 2, porque en ese punto el ángulo es igual a 0°. ¡Debes centrarte en las tres raíces restantes!

¡Calcula la raíz más cercana a 2 por el método de intervalos encajados! Con seguridad puedes afirmar que $y \in (1{,}2)$.

Para conocer su primera cifra decimal, calcula los valores del polinomio con un intervalo de 0.1, y observa dónde se produce el cambio de signo:

$$P(1.8) = 1.8^8 - 1.8^7 - 8 \cdot 1.8^6 + 7 \cdot 1.8^5 + 20 \cdot 1.8^4 - 14 \cdot 1.8^3 - 16 \cdot 1.8^2 + 7 \cdot 1.8 + 2 = 0.2135705600 \ldots$$

$$P(1.9) = 1.9^8 - 1.9^7 - 8 \cdot 1.9^6 + 7 \cdot 1.9^5 + 20 \cdot 1.9^4 - 14 \cdot 1.9^3 - 16 \cdot 1.9^2 + 7 \cdot 1.9 + 2 = -0.4356614899 \ldots$$

Como puedes ver, el cambio de signo se produjo entre 1.8 y 1.9. Entonces, puedes asegurar que la primera cifra de la raíz decimal es 8:

$$y = 1.8 \ldots$$

Y de la misma manera, llegarás a conocer las siguientes dos cifras:

$$y = 1.827$$

Con la ayuda de tu calculadora puedes comprobar que, en efecto, el valor del doble del coseno de 24° es cercano al que acabas de hallar:

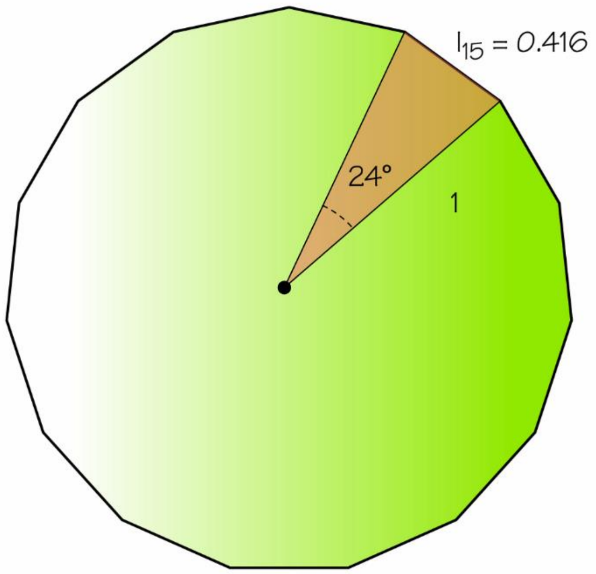
$$Cos24° = 1.827090915 \ldots$$

Por la ley de cosenos, calcula la longitud del lado del polígono buscado:

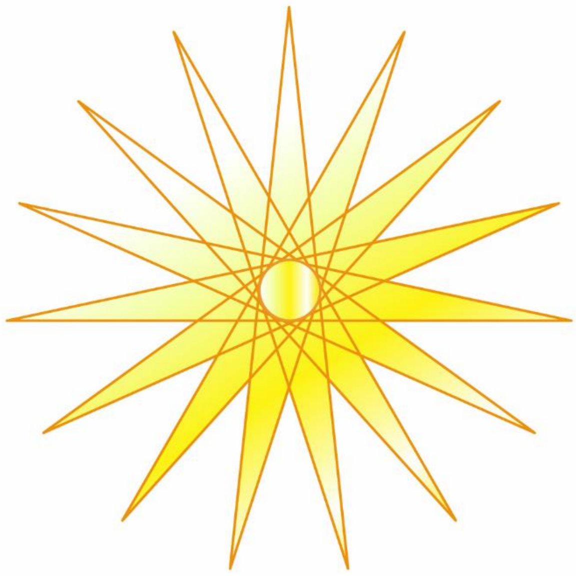
$$x = |_{15}\sqrt{2 - 2CosA} = \sqrt{2 - y} = \sqrt{2 - 1.827} = 0.4158233819 \ldots m$$

¡Ahora el novio puede construir el polígono de 15 lados! Anota su respuesta:

El lado del pentadecágono, inscrito en una circunferencia de 1 dm de radio, mide 0.416 dm.



¡El método de intervalos encajados resolvió el problema brillantemente!, ¿no es así? El novio recibió del joyero un girasol de oro de hermosos colores.



Mirándolo, los amados recordaban que todos los girasoles giran siempre en la misma dirección, en dirección al sol. Ninguno se mira a sí mismo y por eso no hay conflicto entre ellos.

Lo hicieron así y vivieron felices hasta el final de sus días.

Bibliografía

Aleksandrov, K, et al (1981). La Matemática: su contenido, métodos y significado. Editorial Alianza S.A Madrid España.

Apostol, Tom (1961). Calculus Vol 1. Blaidell PublishingCompany. New York, USA.

Boyer, Carl (1968). A History of Mathematics. Holt, Rinehart and Winston, Inc 1964.

De Mello Anthony (1997). La oración de la rana 2. Editorial Sal Terrae, Bogotá, 1997.

Howard Eves (1964). An introduction of a History of Mathematics. Holt, Rinehart and Winston.

Idries Shah (1978). Aprender a aprender. Ediciones Paidos Ibérica S.A, Barcelona.

Idries Shah (1982). El buscador de la verdad. Ediciones Kaidós, Barcelona.

Jaskowski, S. (1934). On the Rules of Suypposition in Formal Logic. Studia Logica N1, Varsovia.

Kneale, William (1972). El desarrollo de la Lógica. Ediorial Tecnos S.A, Madrid

Morris Kline (1992). El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días. Alianza Editorial. S.A, Madrid.

Morris Kline (1974). Matemáticas en el mundo moderno. Editorial Blume. S.A, Madrid

Osho (2007). La Geometría de la Conciencia. Enseñanzas místicas de Pitágoras. Editorial Edaf, SL. Madrid.

Ramanujan, S. (2000). Modular Equations and Aproximations to pi. Quarter Journal of Mathematics.

Rey Pastor y Babini J. (1951). Historia de la Matemática. Espassa-Calpe S.A Buenos Aires.

Ribnikov, K. (1974). Historia de las Matemáticas. Editorial Mir, Moscú.

Rumi, Yalal Al-Din (1989). 50 cuentos sufíes. Ediciones Paidos Ibérica S.A Barcelona.

El sello editorial de la Corporación Ecuatoriana para el Desarrollo de la Investigación y la Academia – CEDIA, nace con la finalidad de aportar a la creación y publicación de resultaos, investigaciones y procesos académicos, que fomenten el desarrollo de la ciencia y promuevan la innovación a nivel nacional e internacional.

1ª edición

ISBN: 978-9942-8952-6-4

TREINTA RELATOS UNIVERSALES DE GEOMETRÍA ELEMENTAL

Esta obra revisa varios problemas de geometría que se desarrollan a través de personajes históricos y relatos fantásticos. Gracias a estas diversas historias, el lector se involucrará en el fascinante mundo de la geometría y fortalecerá su conocimiento.

El lector tendrá la capacidad de resolver problemas algebraicos con “regla y compás”; es un libro dirigido a estudiantes con conocimiento básico de geometría y, por supuesto, al lector curioso que desea expandir su razonamiento.

Los autores nos presentan una forma muy sencilla de solucionar problemas cotidianos, planteados desde una época donde la imaginación fue la principal herramienta del ser humano para la búsqueda de la verdad y el conocimiento.

cedia

ESPE
UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA